



2º Congresso Brasileiro de Teoria de Resposta ao Item

MODELOS ASSIMETRICOS EM TRI

Dr. Jorge Luis Bazán

jlbazan@pucp.edu.pe

<http://argos.pucp.edu.pe/~jlbazan/>



Bahia Othon Palace Hotel - Salvador, BAHIA, de 7 a 9 de Dezembro de 2011

1. Regressão Binária

2. Modelos tradicionais da Teoria da Resposta ao Item

3. Modelos da TRI com Curvas características assimétricas

4. Inferência Bayesiana na TRI

5. Modelos da TRI considerando traços latentes assimétricos

6. Referências

Apêndice: Uso do Bayesian Modeling na TRI

1. REGRESSÃO BINÁRIA

- A regressão Logística tem sido o modelo mais usado na regressão binária em diferentes áreas de interesse.
- Todo tipo de respostas (categóricas, discretas e contínuas) podem ser transformadas em respostas dicotômicas
- É uma ferramenta poderosa, bastante desenvolvida da perspectiva estatística e com muitas contribuições acadêmicas e inúmeras aplicações.
- Não em tanto, existe evidencia de situações em que ela pode estar mal especificada e porem os dados podem estar mal ajustados.
- Assim, muitas propostas de modelos alternativos de regressão binária foram desenvolvidos, em especial considerando ligações assimétricas.

Considere: $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ v.a dependente com n observações, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})'$ covariáveis, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ coeficientes de regressão.

Também $y_i = 1$ com probabilidade p_i y $y_i = 0$ com probabilidade $1 - p_i$.

Na modelagem de dados binários é assumido que

$$p_i = F(\eta_i) = F(x_i'\beta), \quad i = 1, \dots, n,$$

Donde $F(\cdot)$ denota a função de distribuição acumulada (fda) e F^{-1} é chamada a função de ligação em que $\eta_i = x_i'\beta$ é o i -ésimo preditor linear.

Na regressão logística temos que $F(\cdot) = \frac{\exp(x_i'\beta)}{1 + \exp(x_i'\beta)}$ em que $F(\cdot)$ corresponde á fda da distribuição Logística padrão. Neste caso $F^{-1}(\cdot)$ é chamada função de ligação LOGIT.

Quando $F(\cdot)$ corresponde á fda da distribuição normal padrão, isto é $F(\cdot) = \Phi(x'_i\beta)$, se tem a regressão probito e neste caso $F^{-1}(\cdot)$ é chamada de função de ligação PROBIT.

Quando $F(\cdot) = 1 - \exp(-\exp(x))$ corresponde á fda da Gumbel se tem a regressão de valor extremo. Neste caso $F^{-1}(\cdot)$ é chamada de função de ligação LOG LOG COMPLEMENTAR.

Quando $F(\cdot) = \exp(-\exp(-x))$ corresponde á fda da Gumbel reversa se tem a regressão de valor extremo reversa e neste caso $F^{-1}(\cdot)$ é chamada de função de ligação LOGLOG.

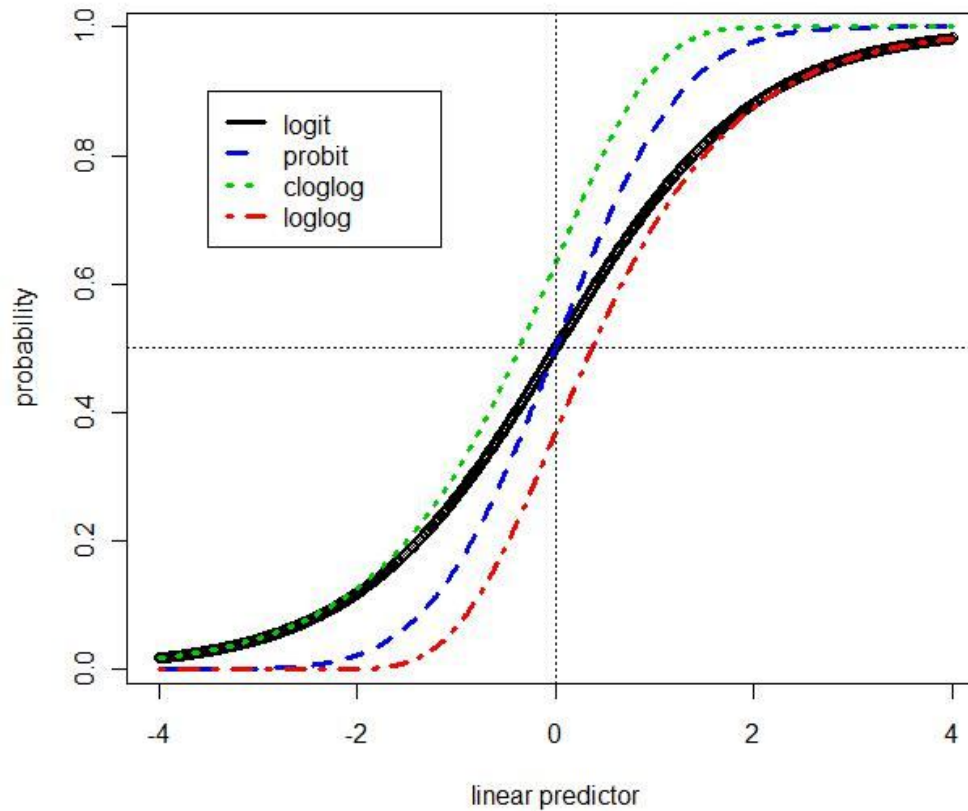


Figura 1. Funções de ligação em Regressão Binária. Logito e Probit são simétricas em torno a $p=0.5$ e o preditor linear $=0$ o que é diferente para Cloglog e Loglog.

Em dados binários:

- Ligações simétricas (em torno de $p_i = 0.5$): probito e logito.
- Ligações simétricas podem ser inadequadas e mal especificadas (Figura 2 e 3)
- Ligações assimétricas: Prentice (1976), Aranda-Ordaz (1981), Guerrero y Johnson (1982), Stukel (1988), Czado y Santner (1992a,b), Chen et al., (1999), Basu e Mukhopadhyay (2000), Haro-López, et al. (2000).
- Ligações probito assimétricas: Czado (1994), Chen et al. (1999) e Bazán et al. (2005).

Maiores detalhes em

Bazán, J. L. , Bolfarine, H. y Branco, D. M. (2010) A framework for skew-probit links in Binary regression. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39, 678-697

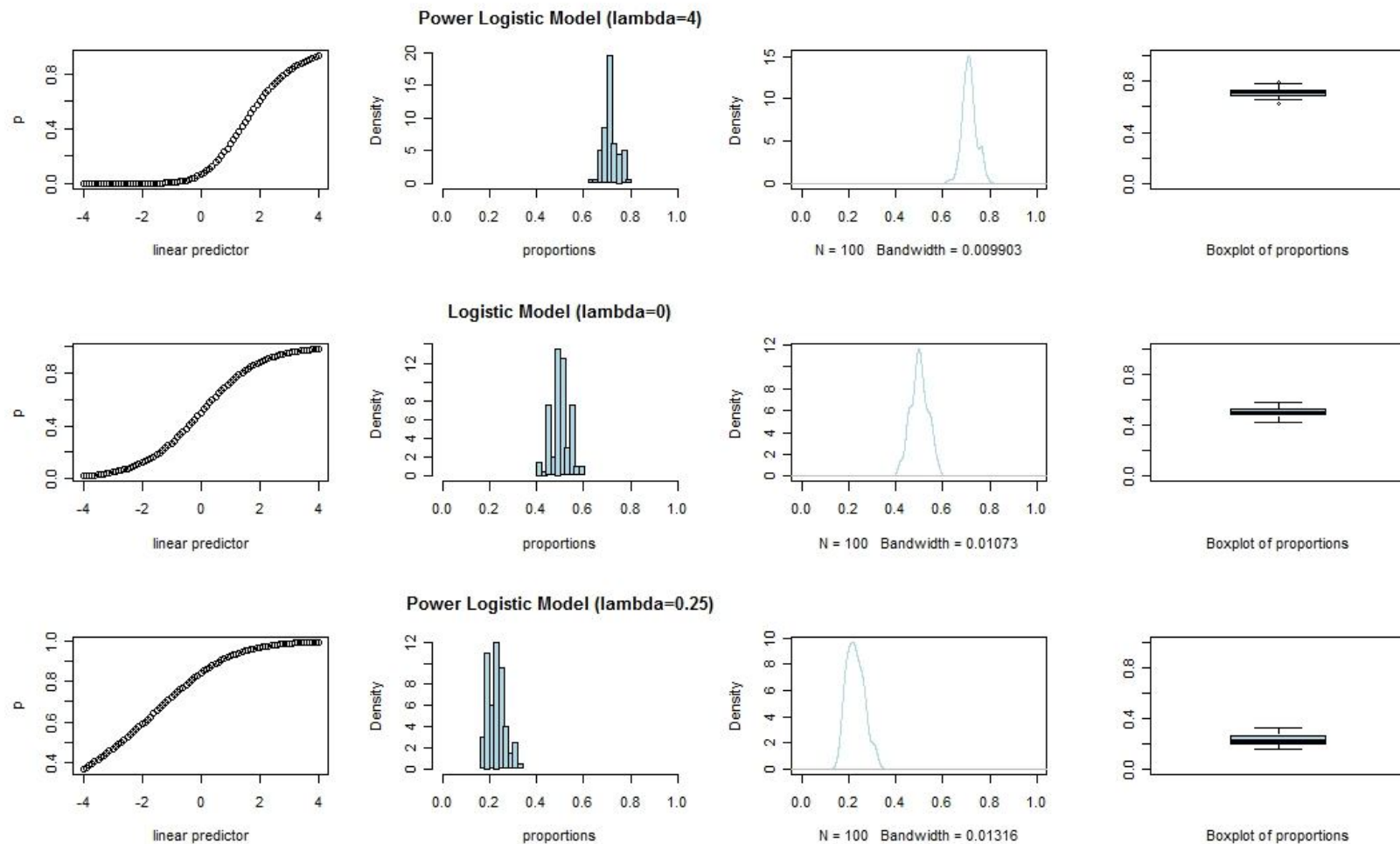


Figura 2. Distribuição de 1's e 0's ($n=81$) em 100 amostras simuladas considerando a ligação Power Logística (PL) com o preditor linear fixo. Note que PL é mais adequado para altos e baixos valores de proporção observada.

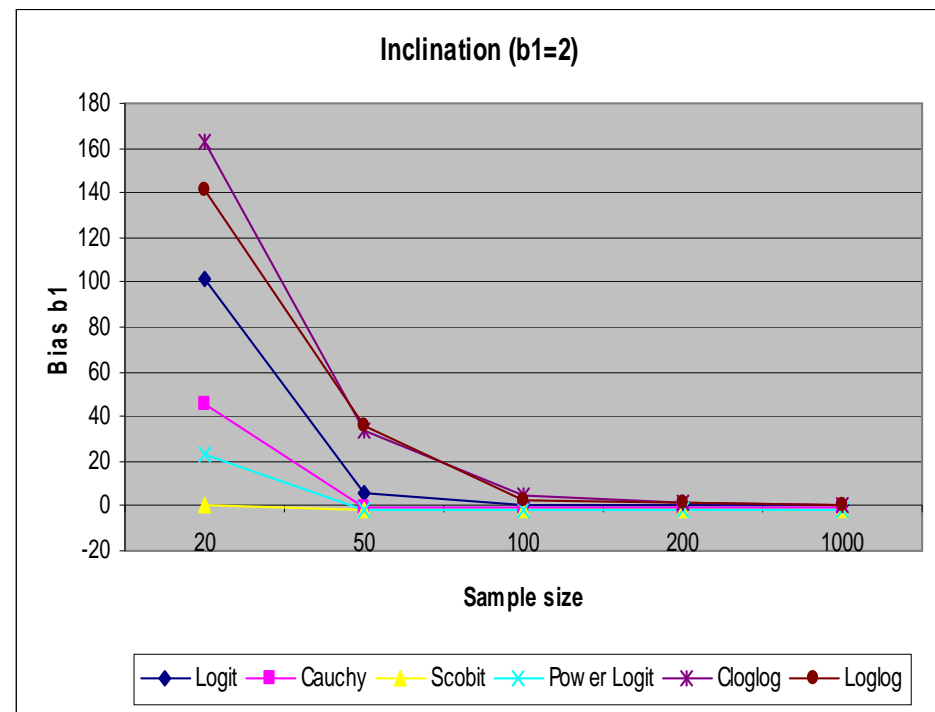
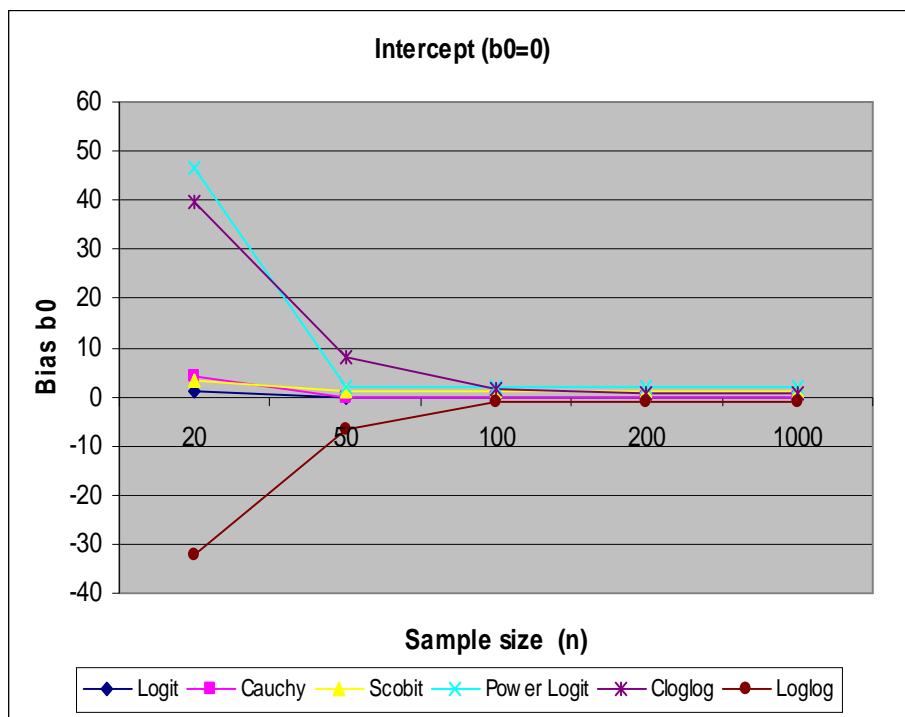


Figura 3. Viés na estimação de coeficientes de uma regressão binária simples com diferentes ligações quando a ligação logito é usada como padrão (modelo mal especificado). Note que quando o tamanho da amostra se incrementa o viés decresce mais ainda permanece importante.

2. MODELOS TRADICIONAIS DA TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM

2.1 Definição e Observações

2.2 Casos particulares: O modelo TRI com ligação Logito

2.3 Verossimilhança na TRI

2.4 Formulações como modelo de regressão latente

2.5 Verossimilhança aumentada do modelo TRI

mathb.sav - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

4 :

	i01	i02	i03	i04	i05	i06	i07	i08	i09	i10	i11	i12	i13	i14
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
10	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
11	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
12	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
14	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
18	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
19	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
20	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
21	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1

Data View Variable View /

SPSS Processor is ready

Figure 4. Dados para Teoria da Resposta ao item (itens: I01 até I18, indivíduos: 1 até n=978)

Os primeiros modelos da TRI se desenvolveram nas décadas dos anos 40 e 50 do século anterior e tem sido popularizados ao serem usados nos sistemas de avaliação educacional internacionais e nacionais.

Peru

Unidade de Medição de qualidade Educativa

Brasil

- Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico – SAEB.
- Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo –SARESP.
- ENEM

No mundo

LLECE, TIMS, PISA

- Andrade, D. F., Tavares, H. R., Valle, R. C.(2000). Teoria da Resposta ao Item. Conceitos e Aplicações. Associação Brasileira de Estatística: São Paulo.
- Klein, R. (2003). Utilização da Resposta ao Item no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação. Rio de Janeiro, 11, 40, 283-96.
- Pasquali, L. (2007). *Teoria de resposta ao item: teoria, procedimentos e aplicações*. Brasília: LabPAM/UnB.
- Moreira, J. Fernando (2010). Aplicações da Teoria da Resposta ao item (TRI) no Brasil. *Rev. Bras. Biom.*, São Paulo, v.28, n.137 4, p.137-170. Disponível http://jaguar.fcav.unesp.br/RME/fasciculos/v28/v28_n4/A9_Fernando.pdf
- Azevedo, C. e Gamerman, D. (2009). Introdução à Teoria de Resposta ao Item. Minicurso. I Conbratri.

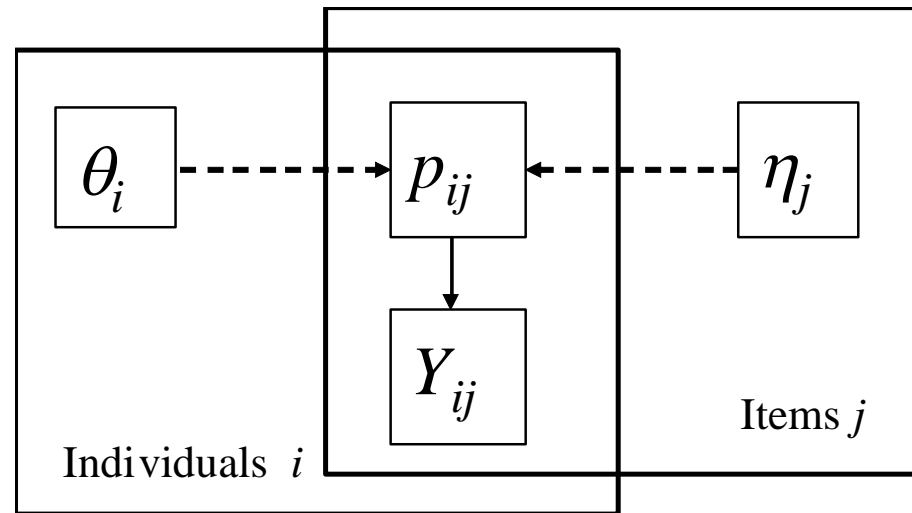


Figura 5. Diagrama da Teoria da Resposta ao Item

- \longrightarrow Variáveis manifestas, $- - \rightarrow$ Variáveis latentes
- “Caixas” para indivíduos e itens (variável latente e parâmetros de item)
- Sobre perspectiva bayesiana é possível adicionar estruturas distribucionais explícitas para os parâmetros de item η_j e para a variável latente θ_i .

2.1 Definição e Observações

Considere n indivíduos avaliados em um teste de k itens. Um modelo TRI de dois parâmetros binário e unidimensional é um sistema no qual para cada indivíduo i existe um modelo de variável latente monótono unidimensional (Y, Θ_i) , definido pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} Y_{ij} | u_i, \eta_j &\sim \text{Bernoulli}(p_{ij}) \\ p_{ij} &= P(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \eta_j) = F(m_{ij}) \\ m_{ij} &= a_j(\theta_i - b_j), \\ i &= 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Em que

- Y_{ij} é a variável manifesta a qual modela a resposta binária de cada indivíduo responder corretamente ou não ao item j .
- $\eta_j = (a_j, b_j)$ são dois parâmetros que representam a discriminação e a dificuldade do item j respectivamente.
- θ_i é o valor da variável ou traço latente Θ_i do indivíduo i , em algumas situações a habilidade do indivíduo i .
- p_{ij} é a probabilidade condicional dado $\Theta_i = \theta_i$.
- F é chamada a curva característica do item (CCI) e
- m_{ij} é o preditor linear latente relacionada com o traço latente do indivíduo i que responde ao item j .

Observações

O modelo TRI de 2 parâmetros:

- Satisfaz a propriedade de independência condicional latente; isto é, para cada indivíduo i as respostas Y_{ij} a diferentes itens é condicionalmente independente dada a variável latente θ_i
- Satisfaz a propriedade de monotonicidade latente, porque é uma função estritamente não decrescente de θ_i .
- É latente unidimensional.
- $F(m_{ij})$ é a mesma pra cada caso e $F^{-1}(\cdot)$ é chamada a função de ligação.
- Também assume-se independência entre as respostas de diferentes indivíduos

- Os parâmetros de dificuldade b_j e de discriminação a_j representam a posição e inclinação do item, respectivamente, a_j é o valor proporcional à inclinação da CCI no ponto b_j
- Valores de $a_j < 0$ não são esperados. O espaço paramétrico para o parâmetro b_j é arbitrário e corresponde ao mesmo que o traço latente que esta geralmente na reta real.
- Outra parametrização para preditor latente é $m_{ij} = a_j\theta_i - b_j$ a qual é preferida na inferência bayesiana porque facilita o tempo de convergência computacional. Quando é usada esta parametrização, o parâmetro prévio de dificuldade pode ser obtido fazendo $\frac{b_j}{a_j}$

O primeiro modelo TRI binário foi introduzido pelo Lord (1952) com uma CCI dado por $F(x) = \Phi(x)$, em que Φ corresponde a fda da normal padrão. Este modelo é conhecido na literatura psicometrica como o modelo de ogiva normal o qual corresponde no contexto dos modelos lineares generalizados `a ligação probito e pode ser denotada como modelo $2P$.

Também, Birbaum (1968) propus uma CCI dada por $F(x) = L(x)$, em que $L(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ corresponde a fda da distribuição logística padrao. Na linguagem dos modelos lineares generalizados corresponde a ligação logito. Este modelo e conhecido como modelo *logístico* e pode ser chamado modelo $2L$

2.3 Casos particulares: Os modelos TRI com ligação logito

Os modelos TRI admitem diversas formulações, as quais dependem basicamente de como a CCI é considerada. Uma versão simples acontece quando $a_j = 1$

$$P(Y_{ij} = 1 \mid \theta_i, b_j) = F(\theta_i - b_j).$$

Este é chamado o modelo TRI de um parâmetro e quando as ligações probito o logito são consideradas nos denotamos como os modelos TRI 1P ou 1L respectivamente.

Também pode ser considerada a CCI dada por

$$P(Y_{ij} = 1 \mid u_i, a_j, b_j, c_j) = c_j + (1 - c_j)F(a_j(\theta_i - b_j)),$$

Em que o parâmetro $c_j \in [0, 1]$ representa a probabilidade de que um indivíduo com mínimo traço latente responda apropriadamente ao item j e F é uma fda.

Este é conhecido como modelo TRI de 3 parâmetros. Si $c_j = 0$, o modelo se reduz ao modelo de 2 parâmetros.

Quando as ligações probito e logito são consideradas temos os modelos TRI 3P ou 3L respectivamente.

Os modelos TRI com ligação logito

Este modelo, chamado também modelo logístico é o modelo mais usado na TRI.

A versão do modelo 3L estabelece que a probabilidade do que o indivíduo i responda corretamente o item j é dada por

$$P(Y_{ij} = 1|\theta_i, a_j, b_j, c_j) = c_j + (1 - c_j) \frac{1}{1 + e^{-Da_j(\theta_i - b_j)}},$$

Em que usualmente é assumido $D = 1$ e outros autores consideram $D = 1.7$ para aproximar este modelo para o modelo de ogiva normal. Os casos particulares são

- $P(Y_{ij} = 1|\theta_i, a_j, b_j) = \frac{1}{1 + e^{Da_j(\theta_i - b_j)}} \quad (\text{com } c_j = 0) \text{ e}$
- $P(Y_{ij} = 1|\theta_i, b_j) = \frac{1}{1 + e^{D(\theta_i - b_j)}} \quad (\text{com } c_j = 0 \text{ y } a_j = 1).$

O modelo de um parâmetro é conhecido também como o modelo de Rasch não em tanto tem uma derivação própria (veja, por exemplo, Fischer e Molenaar, 1995).

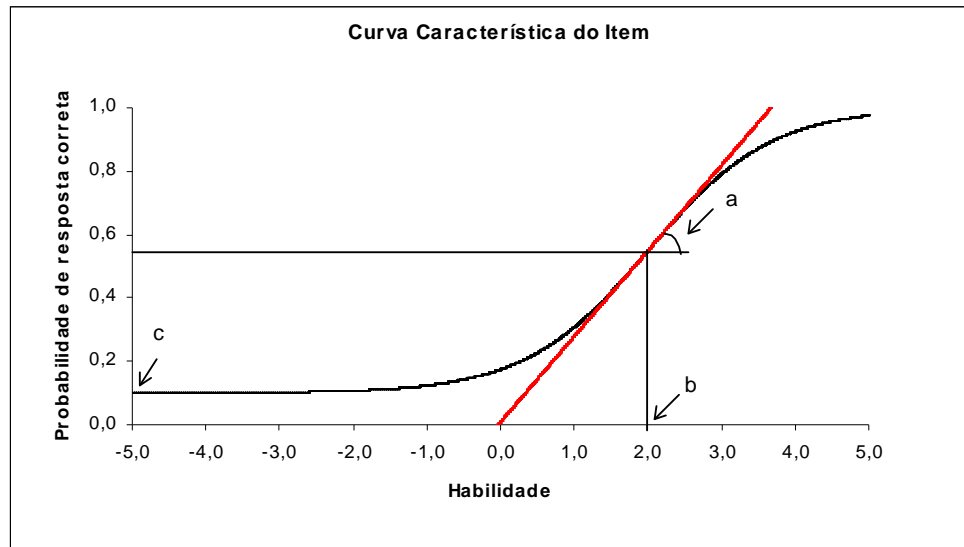


Figura 5. CCI do modelo TRI de 3 parâmetros

- A CCI fornece a probabilidade de indivíduos de vários níveis de traço latente responderem corretamente ao item.
- Condicionado ao traço latente, a probabilidade de um indivíduo responder corretamente ao item só depende do modelo adotado e dos parâmetros do item.
- Resumi-se toda a informação com relação a desempenho do indivíduo no teste em θ .

2.3 Verossimilhança na TRI

No modelo TRI de 2 parâmetros, a densidade conjunta das respostas multivariadas $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$, com $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{ik})$ dado o vetor de variáveis latentes $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$ o vetor de parâmetros de item $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)'$ considerando a independência condicional pode ser escrita como:

$$f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k F(m_{ij})^{y_{ij}} (1 - F(m_{ij}))^{1-y_{ij}}$$

Porem, seja $D_{obs} = y$ os dados observados. A função de verossimilhança para o modelo TRI de 2 parâmetros é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}|D_{obs}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k F(m_{ij})^{y_{ij}} (1 - F(m_{ij}))^{1-y_{ij}},$$

Em que $F(\cdot)$ é a fda da normal padrão ou logística padrão.

2.4 Formulações como modelo de regressão latente

Uma formulação alternativa do modelo TRI de 2 parâmetros, inicialmente devida a Albert (1992) é obtida assumindo

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & Z_{ij} > 0; \\ 0, & Z_{ij} \leq 0. \end{cases} ,$$

$$Z_{ij} = m_{ij} + e_{ij}, e_{ij} \sim F(\mu = 0, \sigma = 1),$$

em que:

- $F(\cdot)$ pode ser a fda de uma distribuição simétrica como a normal ou logística padrão em que $F(s) = 1 - F(-s)$, $\forall s$,
- Z_{ij} é uma variável latente auxiliar associada com a resposta binária y_{ij} a qual pode ser vista como uma variável manifesta indicadora de sim a variável latente é positiva ou não.

$$\begin{aligned} \lceil P(y_{ij} = 1 \mid \theta_i) &= P(Z_{ij} > 0 \mid \theta_i) = P(e_{ij} > -m_{ij} \mid \theta_i) = 1 - P(e_{ij} < -m_{ij} \mid \theta_i) = 1 - F(-m_{ij}) = F(m_{ij}), \\ P(y_{ij} = 0 \mid \theta_i) &= P(Z_{ij} \leq 0 \mid \theta_i) = P(e_{ij} \leq -m_{ij} \mid \theta_i) = F(-m_{ij}) = 1 - F(m_{ij}). \quad \rfloor \end{aligned}$$

Reescrevendo a formulação de a variável latente auxiliar para o item j temos

$$Z_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\theta_i + e_{ij}, \quad e_{ij} \sim F(\mu = 0, \sigma = 1), \quad i = 1, \dots, n$$

O qual corresponde à regressão da variável latente associada Z_{ij} em relação à variável latente θ_i no item j , em que:

- $\beta_{0j} = -a_j \times b_j$ é o intercepto que expressa a facilidade do item pesado por sua discriminação, assim quando $\beta_{0j} > 0$ temos um item fácil e no caso contrario um item difícil.
- $\beta_{1j} = a_j$ a discriminação, é vista agora como a inclinação da reta regressora e é dito coeficiente de regressão. Quando $0 < a_j \leq 1$ a inclinação corresponde até 45° e uma mudança no traço latente produz uma merma da probabilidade de acerto, se $a_j > 1$ a inclinação corresponde até 90° e a probabilidade de acerto aumenta.
- e_{ij} é um erro aleatório nesta regressão distribuído de acordo à função de ligação.

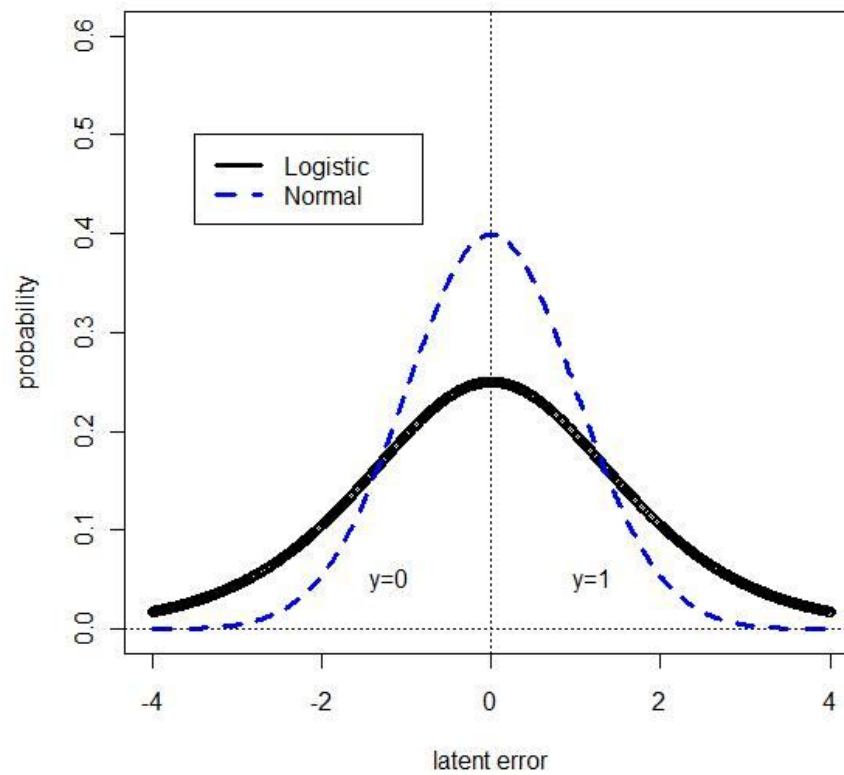


Figura 6. Erro latente da regressão entre a variável latente auxiliar, subjacente á resposta correta do item ($y=1$) ou a á resposta incorreta ($y=0$), e o traço latente

2.5 Verossimilhança aumentada do modelo TRI

Usando a nova formulação, a verossimilhança aumentada considerando a variável latente auxiliar Z_{ij} é

$$L(\theta, \eta | D) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^I f(Z_{ij}; m_{ij}, 1) I(Z_{ij}, y_{ij}),$$

Em que $f(\cdot)$ corresponde à função de densidade da variável latente auxiliar (ou do erro latente)

e $I(Z_{ij}, y_{ij})$ corresponde à função indicadora

$$I(Z_{ij}, y_{ij}) = I(Z_{ij} > 0)I(y_{ij} = 1) + I(Z_{ij} \leq 0)I(y_{ij} = 0).$$

Os modelos TRI tradicionais binários sob perspectiva bayesiana podem ser revisados em

- Fox, J.-P. (2010). Bayesian Item Response Modeling: Theory and Applications. New York: Springer.
- Bazán, J., Valdivieso, L., Calderón, A. (2010). Enfoque bayesiano en modelos de Teoría de Respuesta al Ítem. Reporte de Investigación. Serie B. Nro 25. Departamento de Ciencias. PUCP. Disponível em <http://argos.pucp.edu.pe/~jlbazan/download/Reportef27.pdf>
- Bazán, Jorge; Calderón, A., Valdivieso, L. (2009). *Modelos de Teoría de Respuesta al Item Bajo enfoque Bayesiano. Minicurso. XXVII COLOQUIO DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA. Agosto 10 al 14. Puno, Perú.* Disponível em http://guzlop-editoras.com/web_des/mat01/Modelos_enfoque_bayesiano_JB.pdf?token=603c37ce731593a6f019812a36a897c4028c77ba1292674132#PDFP

O modelo 1L (Rasch) pode ser revisado em

- Bazán, Jorge (2007). "*Modelos de respuestas al item usando Winbugs para Psicometría*". *Décimocuartas Jornadas en Estadística e Informática ECUADOR 2007*. Octubre 17 al 19. Guayaquil. Ecuador. Disponível em

[http://www.icm.espol.edu.ec/jornadas/14/archivos/Diapositivas/BazánJorge/BazánJorge_Modelos de respuestas al item usando Winbugs para Psicometría.zip](http://www.icm.espol.edu.ec/jornadas/14/archivos/Diapositivas/BazánJorge/BazánJorge_Modelos_de_respuestas_al_item_usando_Winbugs_para_Psicometría.zip)

O modelo de 2P parâmetros pode ser revisado em

- Bazán, J. L., Bolfarine, H., Leandro, A. R. (2006). Sensitivity analysis of prior specification for the probit-normal IRT model: an empirical study. *Estadística*. Journal of The Inter-American Statistical Institute. 58, 17-42. Disponível em

<http://argos.pucp.edu.pe/~jlbazan/download/bazanestadistica.pdf>

3. MODELOS DA TRI COM CURVAS CARACTERISTICAS ASSIMETRICAS

3.1 O modelo de Ogiva skew normal da TRI

3.2 Os Modelo LPE e RLPE da TRI

3.3 Interpretação do novo parâmetro

3.4 Exemplo

3.5 Outros desenvolvimentos e futuros trabalhos

3.6 Software

- Nos modelos TRI tradicionais, são consideradas CCI simétricas; este é o caso do modelo logístico e o modelo de ogiva normal.
- Não em tanto, como tem sido observado por Samejima (2000), Bazán et al (2006) e Bolfarine e Bazán (2010) CCI assimétricas podem ser incorporadas considerando um novo parâmetro de item que controla a forma da curva.
- Como acontece na regressão binária, esta assimetria é necessária em situações em que é observada respostas com baixas o altas proporções de acertos $1's$.
- Apresentamos três modelos TRI com assimetria nas CCI recentemente formulados

3.1 O modelo de Ogiva Skew Normal da TRI

Este modelo, denotado como modelo OSN, proposto por Bazán et al (2006), assume que

$$Y_{ij} | \theta_i, \eta_j \sim \text{Bernouilli}(p_{ij})$$
$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \eta_j) = \Phi_{SN}(m_{ij}; d_j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$$

Em que $-1 \leq d_j \leq 1$ é uma parâmetro de forma, m_{ij} o preditor linear latente e Φ_{SN} denota a fda da distribuição skew normal (Azzalini, 1985) com função de densidade

$$\phi_{SN}(z; d) = 2\Phi(z)\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}z\right) \text{ em que } \phi \text{ e } \Phi \text{ corresponden à densidade e à acumulada da}$$

normal padrão.

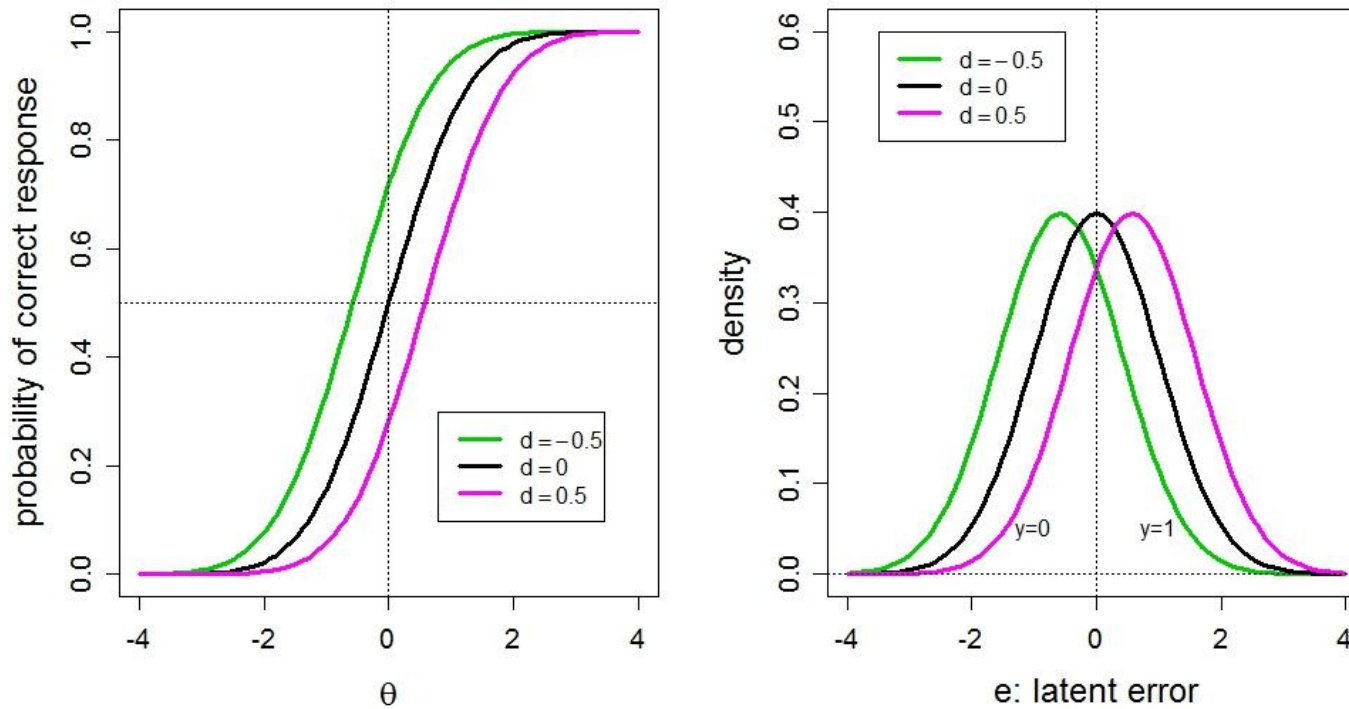


Figura 7. CCI para diferentes valores do traço latente θ e do erro latente da regressão entre a variável latente, subjacente ao acerto ($y=1$) ou fracasso ($y=0$) do item, e a habilidade no modelo de Ogiva Skew-Normal ($a = 1, b = 0$). Note que quando $d = 0$ o modelo 2P é obtido.

Para maiores detalhes ver

Bazán, J. L., Branco, D. M. and Bolfarine (2006). A skew item response model. *Bayesian Analysis*, 1, 861- 892. Disponível em

<http://ba.stat.cmu.edu/journal/2006/vol01/issue04/bazan.pdf>

3.2. Modelos LPE e RLPE da TRI

O Modelo Logístico de expoente positivo (LPE) foi proposto por Samejima (2000). Uma versão reflexa, chamada o modelo A reflexão do modelo Logístico de Expoente positivo ou Logístico de expoente positivo reverso (RLPE) foi formulado por Bolfarine e Bazán (2010). Estes modelos assumem que

$$Y_{ij} | \theta_i, \eta_j \sim \text{Bernouilli}(p_{ij})$$

$$p_{ij} = P[Y_{ij} = 1 | \theta_i, a_j, b_j] = F_{d_j}(m_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k$$

Em que $-1 \leq d_j \leq 1$ é um parâmetro de forma, m_{ij} o preditor linear latente e F_{d_j} e uma função de distribuição acumulada indexada por d_j .

Para LPE $F_{\lambda_j} = L(m_{ij})^{\lambda_j}$ e para RLPE $F_{\lambda_j} = 1 - L(-m_{ij})^{\lambda_j}$ as quais corresponde as fda

$F_1(m_{ij}) = 1 - (1 + e^{m_{ij}})^{-\lambda_j}$ e $F_2(m_{ij}) = (1 + e^{-m_{ij}})^{-\lambda_j}$ respectivamente com $\lambda_j = \frac{1+d_j}{1-d_j}$, que

correspondem às funções de ligação Scobit e Power Logito.

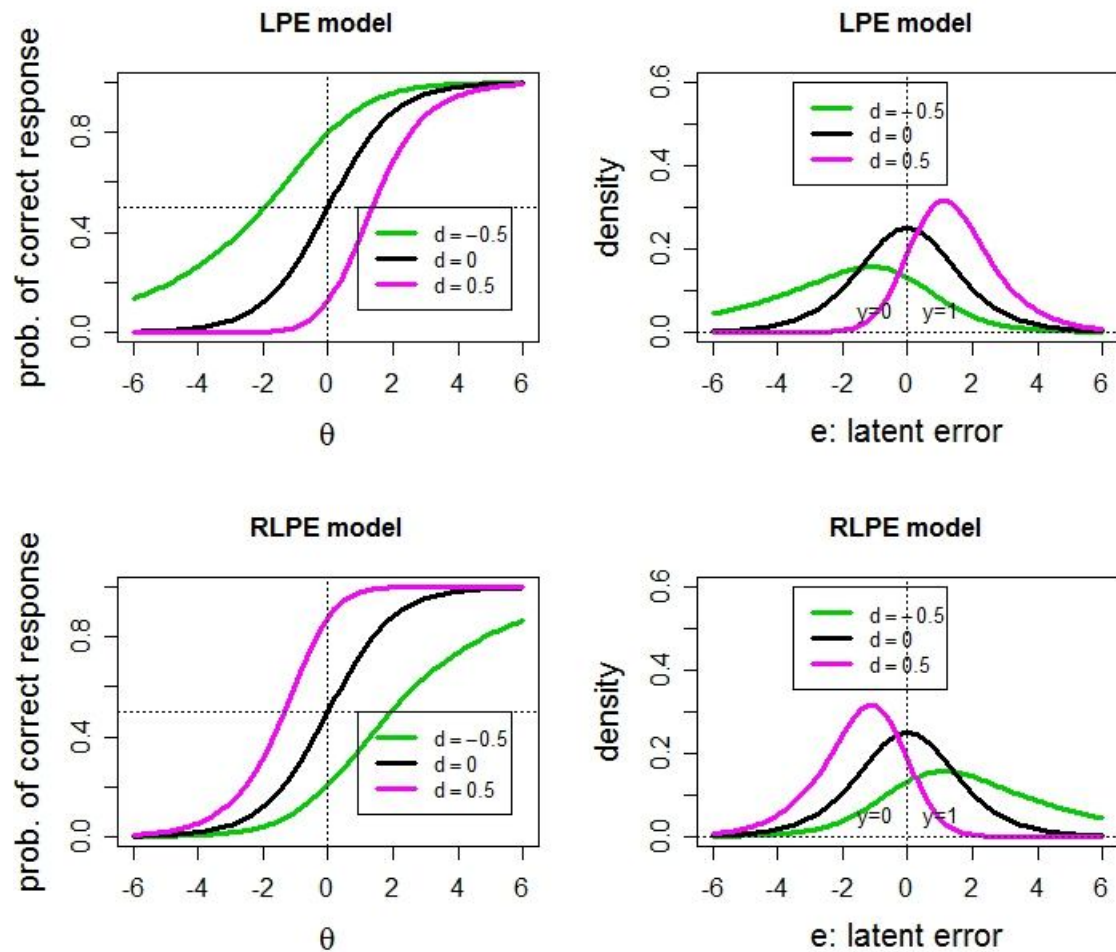


Figura 8. CCI e densidades do erro latente nos modelos LPE e RLPE ($a = 1, b = 0$). 2L ($d = 0$) é um modelo particular.

Veja detalhes em

-Samejima, F. (2000). Logistic positive exponent family of models: Virtue of asymmetric item characteristics curves. *Psychometrika*, 65, 319-335.

-Bolfarine, H. & Bazán, J. L. (2007). *Skewed Logit Item Response Models*. CLAPEM, Congreso Latinoamericano de Probabilidad y Estadística Matemática, Lima-Peru.

-Bolfarine, H., Bazán, J. L. (2010) Bayesian Estimation of the Logistic Positive Exponent IRT model. *Journal of Educational Behavioral Statistics*. 35, 693-713.

3.3 Interpretação do novo parâmetro do item

Novo parâmetro de item e assimetria do erro da regressão latente

O parâmetro d_j nos modelos LPE, RLPE e OSN encontrasse associado com a forma assimétrica da curva CCI ou de modo equivalente com a assimetria considerada no erro latente da regressão da variável auxiliar latente respeito do traço latente que é subjacente a resposta correta ou incorreta do item.

Na figura 9 mostra se a medida de assimetria definida por Arnold e Groeneveld (1995) em relação ao valor do parâmetro d correspondente para os modelos LPE, RLPE e OSN. Note que quando o valor de $d = 0$ temos ausência de assimetria.

Nos modelos LPE e OSN:

- Quando o valor $d > 0$ a CCI apresentam assimetria positiva e temos que pensar que o erro latente tem assimetria positiva. No caso contrario, $d < 0$ tem assimetria negativa.

Note também que para o modelo RLPE o efeito é reverso

- Quando o valor $d > 0$ a CCI apresentam assimetria negativa e temos que pensar que o erro latente tem assimetria negativa. No caso contrario $d < 0$, o tem assimetria positiva.

Logo veremos que:

- Nos modelos LPE e OSN: d positivos penalizam as probabilidades de acerto (bonificam traço latente) e d negativos bonificam as probabilidades de acerto (penalizam traço latente). No modelo RLPE: d negativos penalizam as probabilidades de acerto (bonificam habilidades) e d positivos bonificam as probabilidades de acerto (penalizam traço latente).

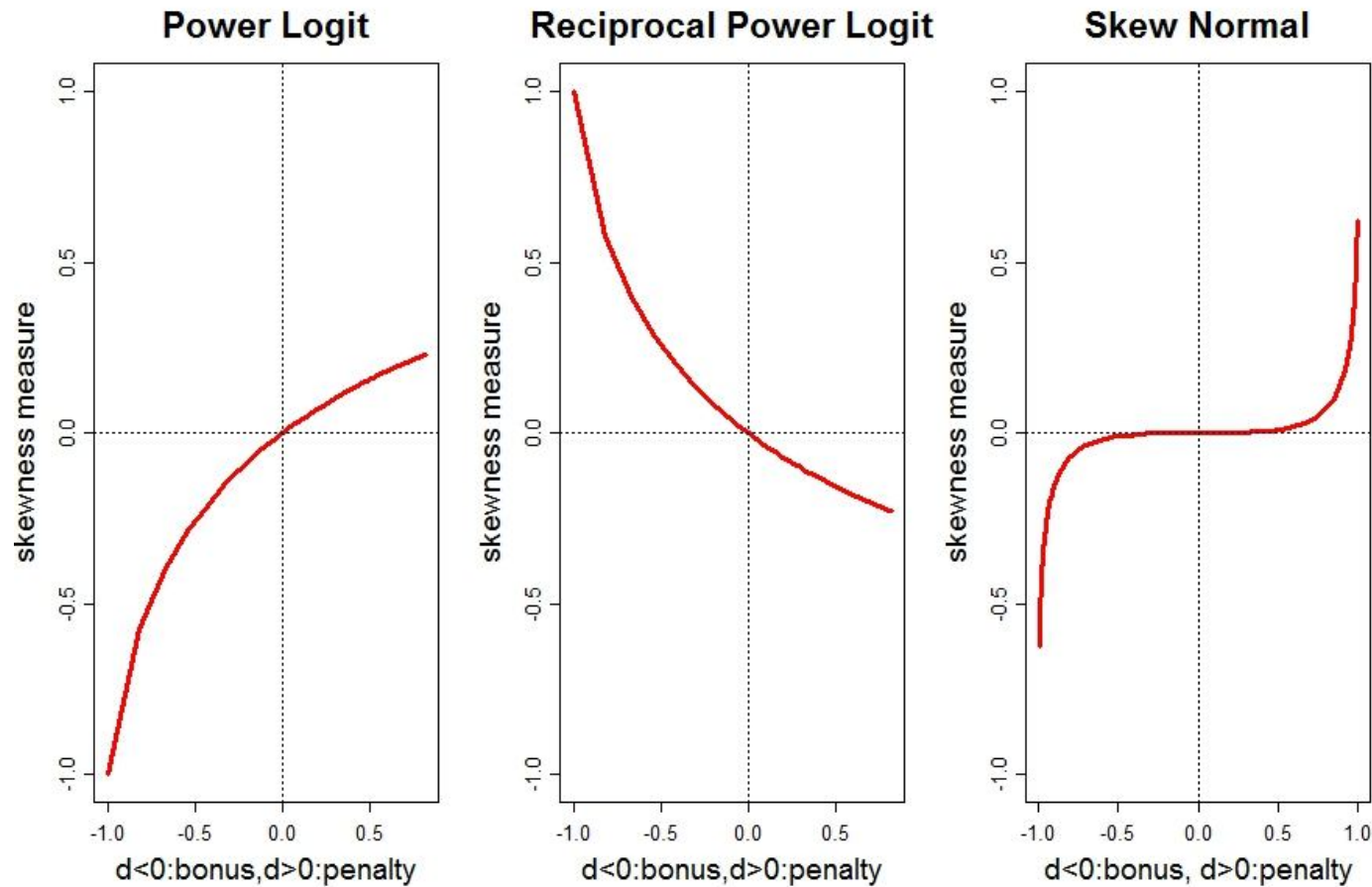


Figura 9. Assimetria como função do parâmetro d nos modelos LPE (distribuição Power Logito), RPLE (distribuição Power logito reversa) e OSN (distribuição skew-normal)

Probabilidade de acerto do item e parâmetro d

Nos modelos LPE e OSN, temos que:

- Quanto maior $d_j > 0$ então a probabilidade de acerto do item é penalizada respeito do caso de ausência de assimetria.
- Quanto maior $d_j < 0$ então a probabilidade de acerto do item é bonificada respeito do caso de ausência de assimetria

No modelo RLPE temos que:

- Quando maior $d_j < 0$ então a probabilidade de acerto do item é penalizada respeito do caso de ausência de assimetria.
- Quando maior $d_j > 0$ então a probabilidade de acerto do item é bonificada respeito do caso de ausência de assimetria.

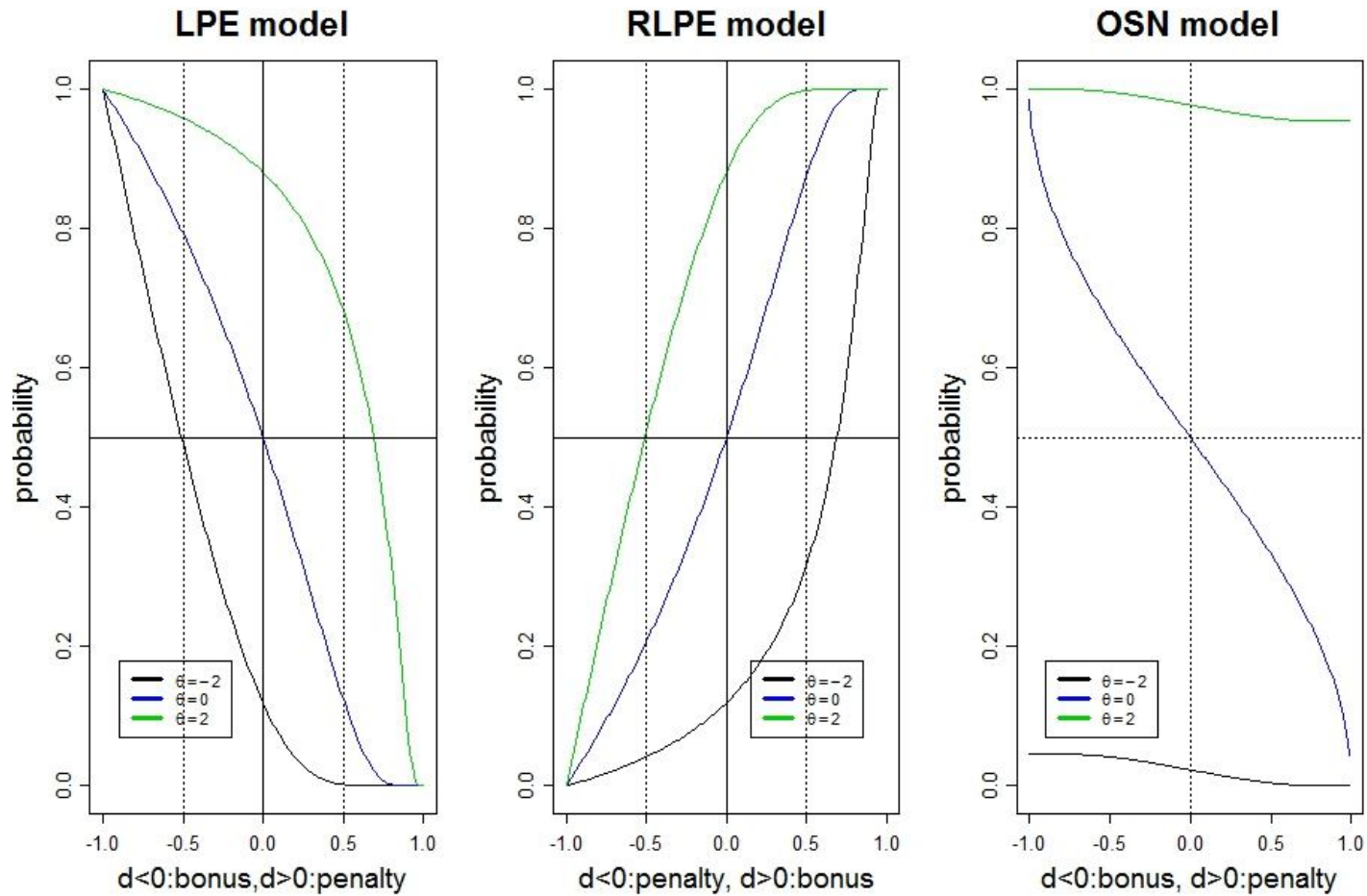


Figura 10. Probabilidade da resposta correta como função do parâmetro d nos modelos LPE, RPLE e OSN ($a = 1, b = 0$) para diferentes níveis de traços latentes. O modelo OSN tem baixa penalidade (bonificação para níveis extremos dos traços latentes)

Dificuldade e Parâmetro d

No modelo LPE (OSN) temos que:

- Quanto maior $d_j > 0$ então as curvas características dos itens são deslocadas à direita e embaixo respeito do caso de ausência de assimetria. Quanto maior $d_j < 0$ então as curvas características dos itens são deslocadas a esquerda e acima respeito do caso de ausência de assimetria.
- Para uma mesma probabilidade (proporção de acertos), conforme d cresce se corresponde com um maior nível de traço latente e no caso contrario conforme d decresce se corresponde com um menor nível de traço latente. Maior bonificação e maior penalidade nos traços latentes respectivamente.

- Para um mesmo nível de traço latente conforme d cresce, se corresponde com um menor probabilidade (proporção de acertos) e no caso contrario conforme d decresce se corresponde com uma maior probabilidade. Maior penalização e maior bonificação nas proporções de acerto respectivamente.

O parâmetro de dificuldade é preservado no modelo, curvas características de itens fáceis estão à esquerda e curvas características de itens difíceis estão à direita.

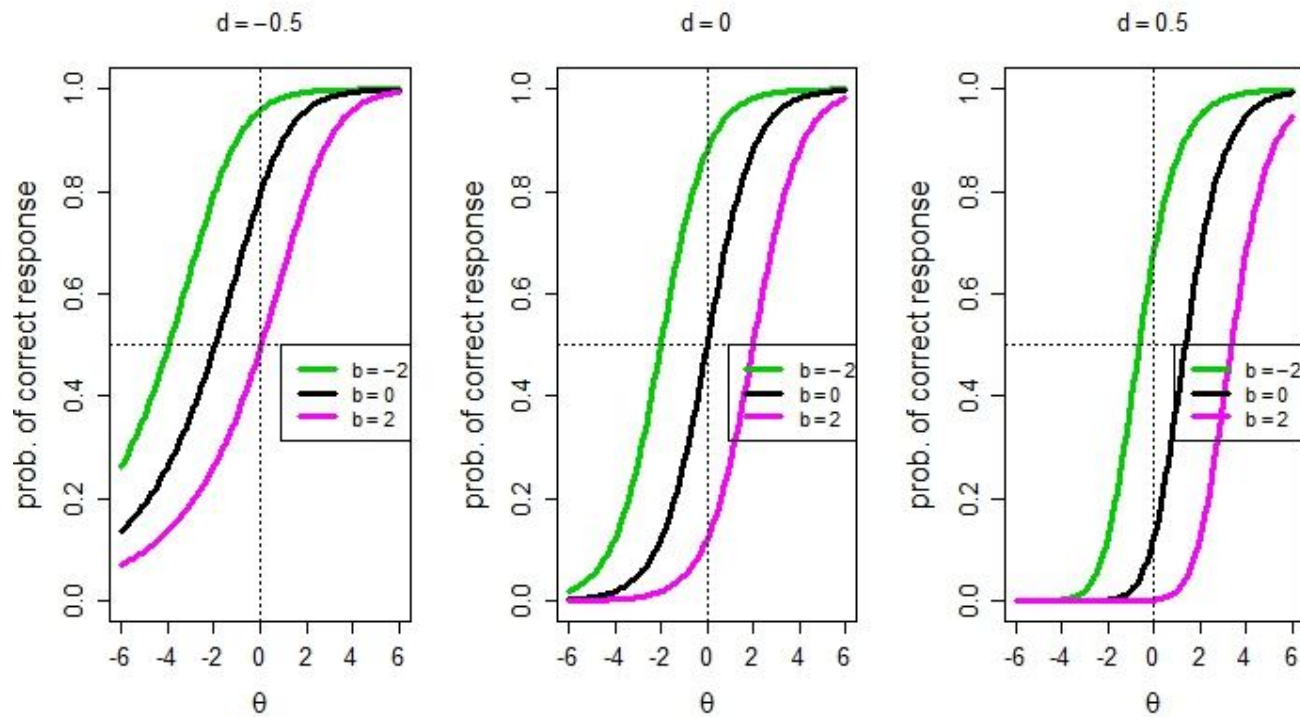


Figura 11. CCI para três valores do parâmetro d no modelo LPE ($a = 1, b = 0$) para itens com diferentes valores do parâmetro de dificuldade.

Efeito reverso acontece no modelo RLPE

- Quanto maior $d_j < 0$ então as curvas características dos itens são deslocadas à direita e embaixo respeito do caso de ausência de assimetria e neste caso se tem maior bonificação do nível de traço latente para uma mesma proporção de acertos ou maior penalização das proporções de acerto para um mesmo nível de traço latente.
- Quanto maior $d_j > 0$ então as curvas características dos itens são deslocadas a esquerda e acima respeito do caso de ausência de assimetria e neste caso se tem maior penalização do nível de traço latente para uma mesma proporção de acertos ou maior bonificação das proporções de acerto para um mesmo nível de traço latente.

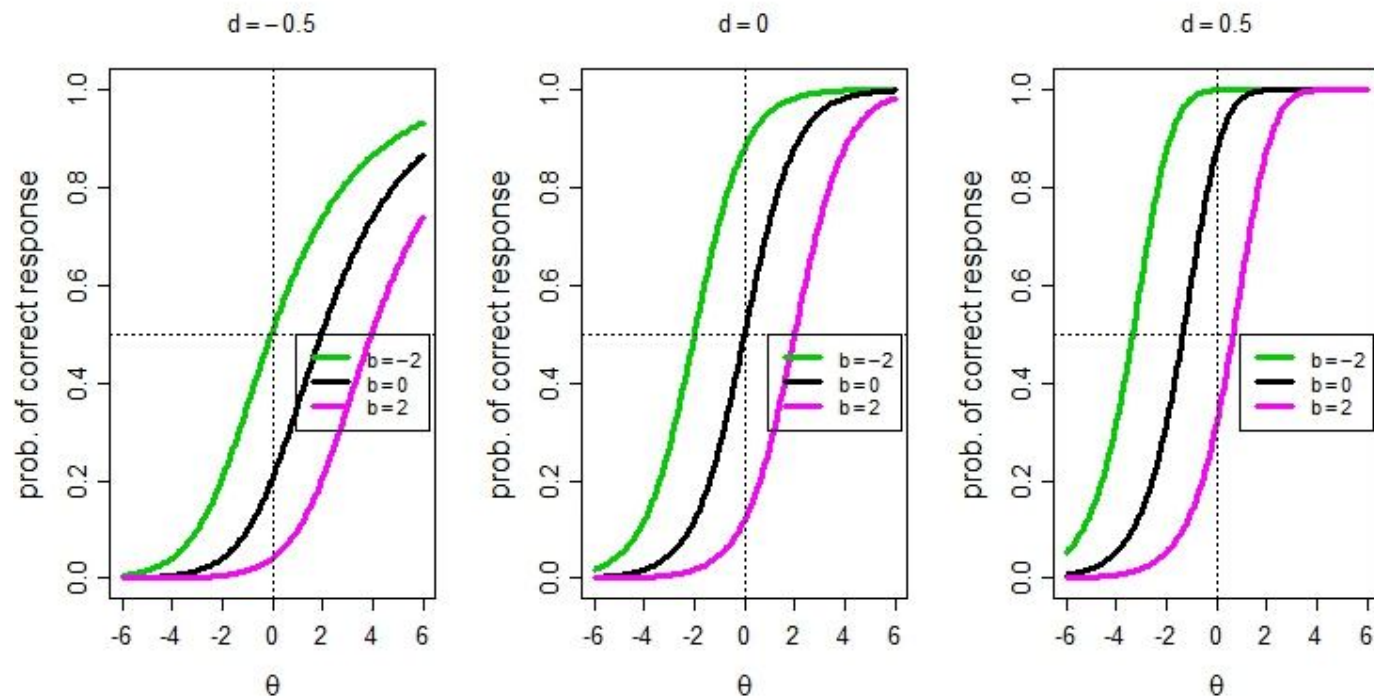


Figura 12. CCI para três valores do parâmetro d no modelo RLPE ($a = 1, b = 0$) para itens com diferentes valores do parâmetro de dificuldade.

Discriminação e parâmetro d

No modelo LPE (OSN) temos que:

- A probabilidade de acerto para uma habilidade media ($\theta = 0$) (ponto de inflexão da CCI)
- Quanto maior $d_j > 0$ então o ponto de inflexão da CCI (probabilidade de acerto para uma habilidade media $\theta = 0$) é menor respeito do caso de ausência de assimetria.
- Quanto maior $d_j < 0$ então o ponto de inflexão da CCI (probabilidade de acerto para uma habilidade media $\theta = 0$) é maior respeito do caso de ausência de assimetria.
- O parâmetro de discriminação é preservado no modelo, a inclinação das curvas características de itens mais discriminativos é maior que de aqueles menos discriminativos.

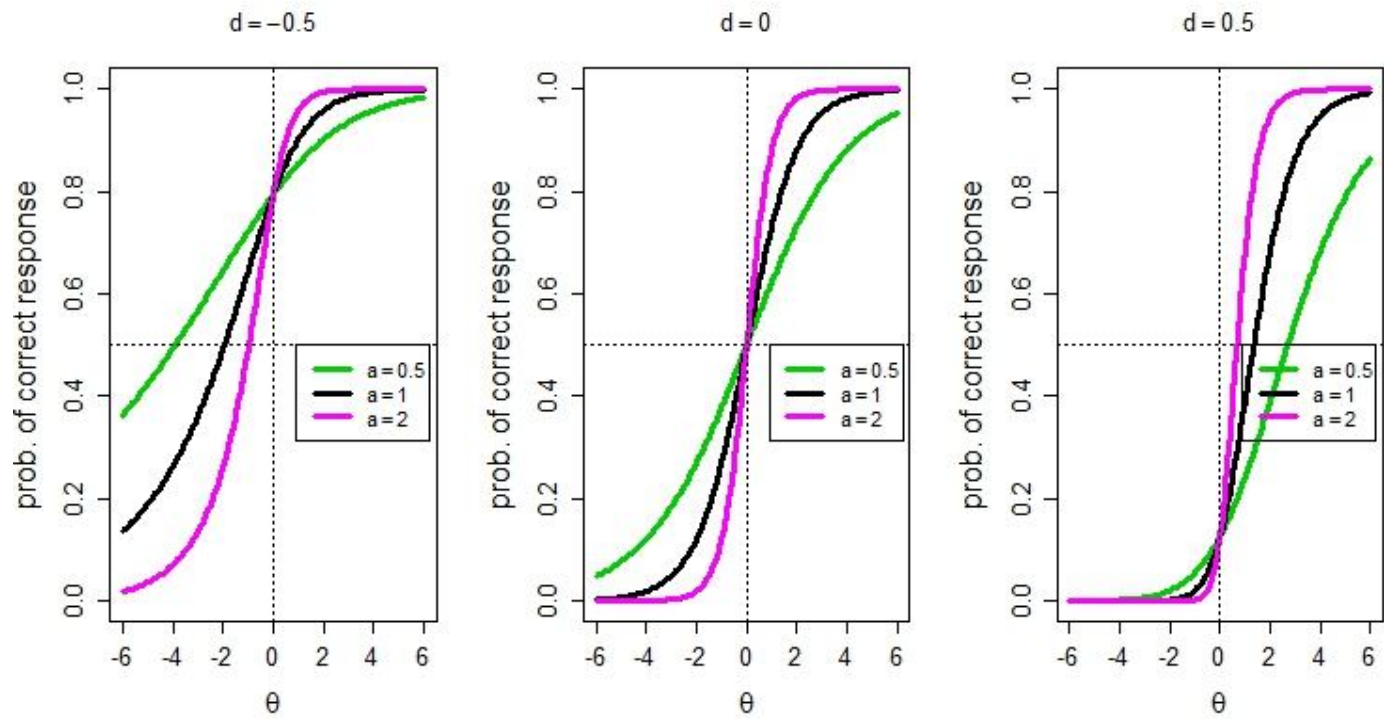


Figura 13. CCI para três valores do parâmetro d no modelo LPE ($a = 1, b = 0$) para itens com diferentes valores do parâmetro de discriminação.

Em resumo

- O novo parâmetro tem a ver com a forma da CCI, não mexe com a dificuldade e a discriminação, e tem um efeito duplo.
- Quando positivo (negativo no RLPE), item mais complexo, penaliza as probabilidades ou bonifica os níveis do traço latente. Isto é ideal para modelagem de níveis baixos do traço latente, já que mudanças menores nesse rango se correspondem a pequenas mudanças da probabilidade de acerto.
- Quando negativo (positivo RLPE), item menos complexo, bonifica as probabilidades ou penaliza os níveis do traço latente. Isto é ideal para modelagem de níveis altos do traço latente, já que mudanças menores nesse rango se correspondem com pequenas mudanças da probabilidade de acerto.

3.4 Exemplo

É considerado os dados reportados por Bolfarine e Bazan (2010) que correspondem uma prova de 18 questões de múltipla escolha aplicada a alunos de 4ta serie. 974 alunos são de escolas rurais e a prova foi desenhada por uma unidade do Ministério de Educação do Peru.

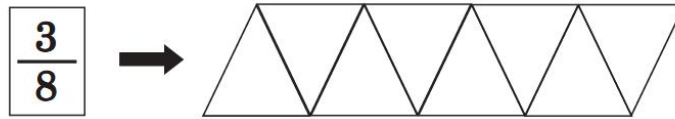
O escore médio do teste é de 8.27 e o desvio padrão é de 4.20.

Os índices de assimetria e curtosis são respectivamente -0.075 e -0.836.

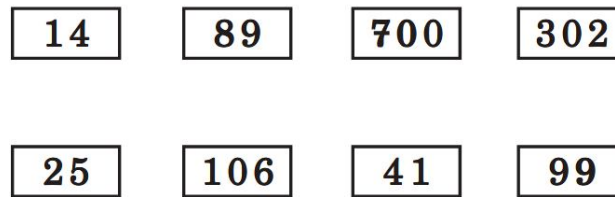
O alfa de cronbach é de 0.83 e a media das proporções de acerto e 0.449.

Exemplos destes itens são apresentados a seguir

14. **PINTA** en la figura la fracción que se indica:



2. Fíjate bien en estos números:



Marca con un aspa (X) todos los números **MENORES QUE 100**.

11. Completa la suma:

$$300 + \square = 350$$

Figura 14. Item 14, 2 e 11 para os dados de Matemática (Bolfarine and Bazan, 2010)

TABLE 1

Results Comparing the Skewed Logistic IRT Models With Logistic IRT Models

Models		p	$Dbar$	$Dhat$	DIC	EAIC	EBIC
Symmetric	1L	992	17,227.3	16,548.1	17,906.6	19,211.3	26,920.9
logistic IRT	2L	1,010	16,886	16,104.3	17,667.8	18,906	26,755.5
models	3L	1,028	17,021.1	16,506.7	17,535.4	19,077.1	27,066.5
Asymmetric	LPE	1,028	16,885.4	16,728.3	17,042.5	18,941.4	26,930.8
skewed logistic	RLPE	1,028	16,832.3	16,708.7	16,955.8	18,888.3	26,877.6
IRT models							

Note. DIC = deviance information criterion; EAIC = expected Akaike's information criterion; EBIC = expected Bayesian information criterion; IRT = item response theory; LPE = logistic positive exponent; RLPE = reflection logistic positive exponent.

Considerando diferentes critérios de comparação de modelos os modelos considerando CCI assimétricas tiveram melhor ajuste que os correspondentes modelos simétricos.

TABLE 2

Item Parameters for Alternative IRT Models for Item 14, Item 2, and Item 11 in Math Data

Items	Models	Item Parameters			
		Discrimination, <i>a</i>	Difficulty, <i>b</i>	Guessing, <i>c</i>	Acceleration (deceleration), λ
Item 14	2L	1.003	-0.358		
	3L	1.065	-0.105	0.108	
	LPE	0.934	-1.214		2.087
	RLPE	4.559	-1.603		0.208
Item 2	2L	1.2777	-0.453		
	3L	1.607	-0.088	0.165	
	LPE	1.768	0.253		0.559
	RLPE	1.060	0.380		2.107
Item 11	2L	1.826	0.092		
	3L	2.065	0.220	0.067	
	LPE	1.680	0.039		2.060
	RLPE	2.070	0.023		1.046

Note. IRT = item response theory; LPE = logistic positive exponent; RLPE = reflection logistic positive exponent.

Mostramos as estimativas dos diferentes parâmetros para quatro modelos TRI. Note aqui que é apresentado o parâmetro de aceleração $\lambda = \frac{d+1}{d-1}$

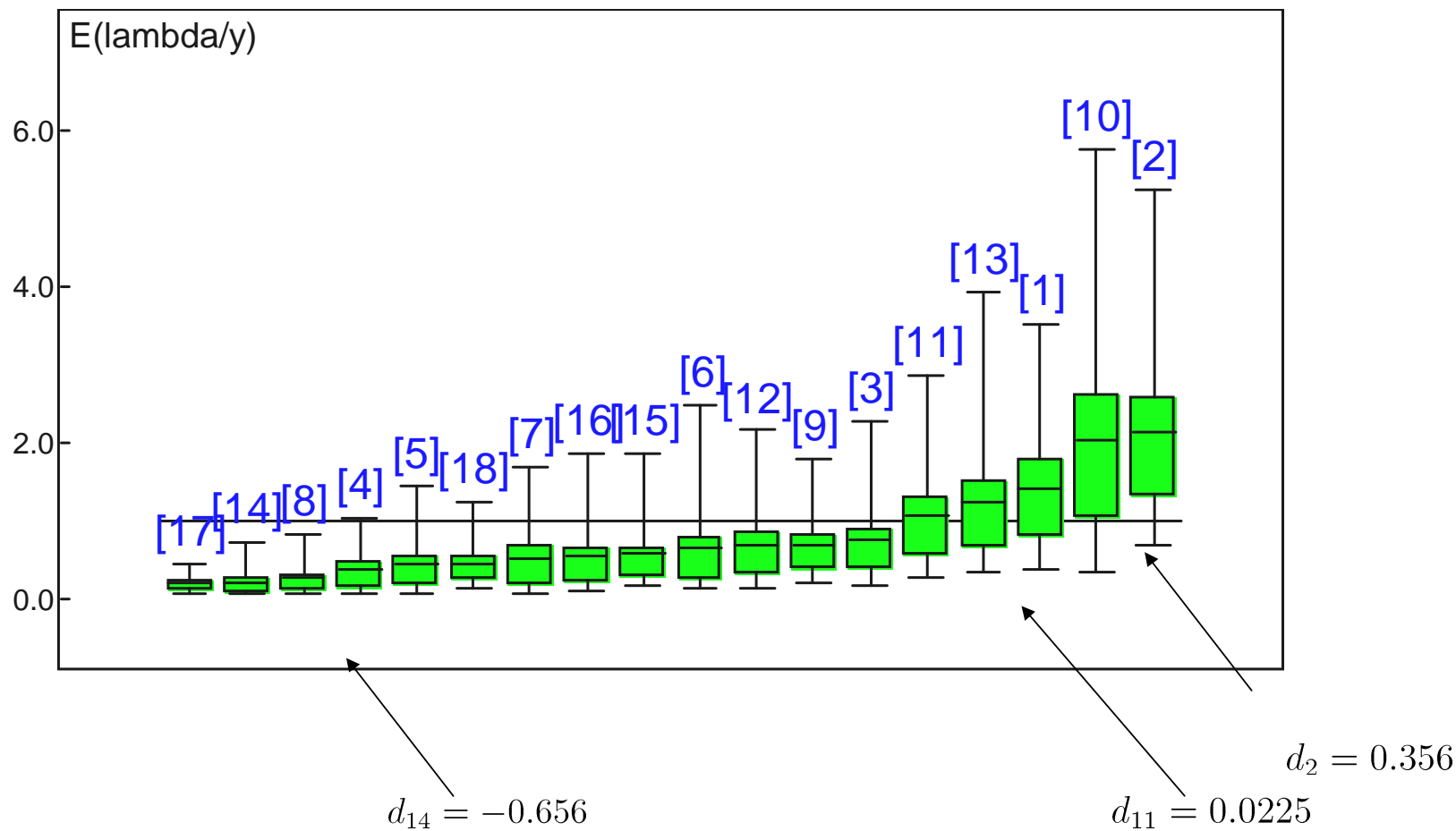


Figure 15: Box-Plots para os parâmetros λ dos 18 itens dos dados de Matemática baixo o modelo RLPE (Bolfarine and Bazan, 2010).

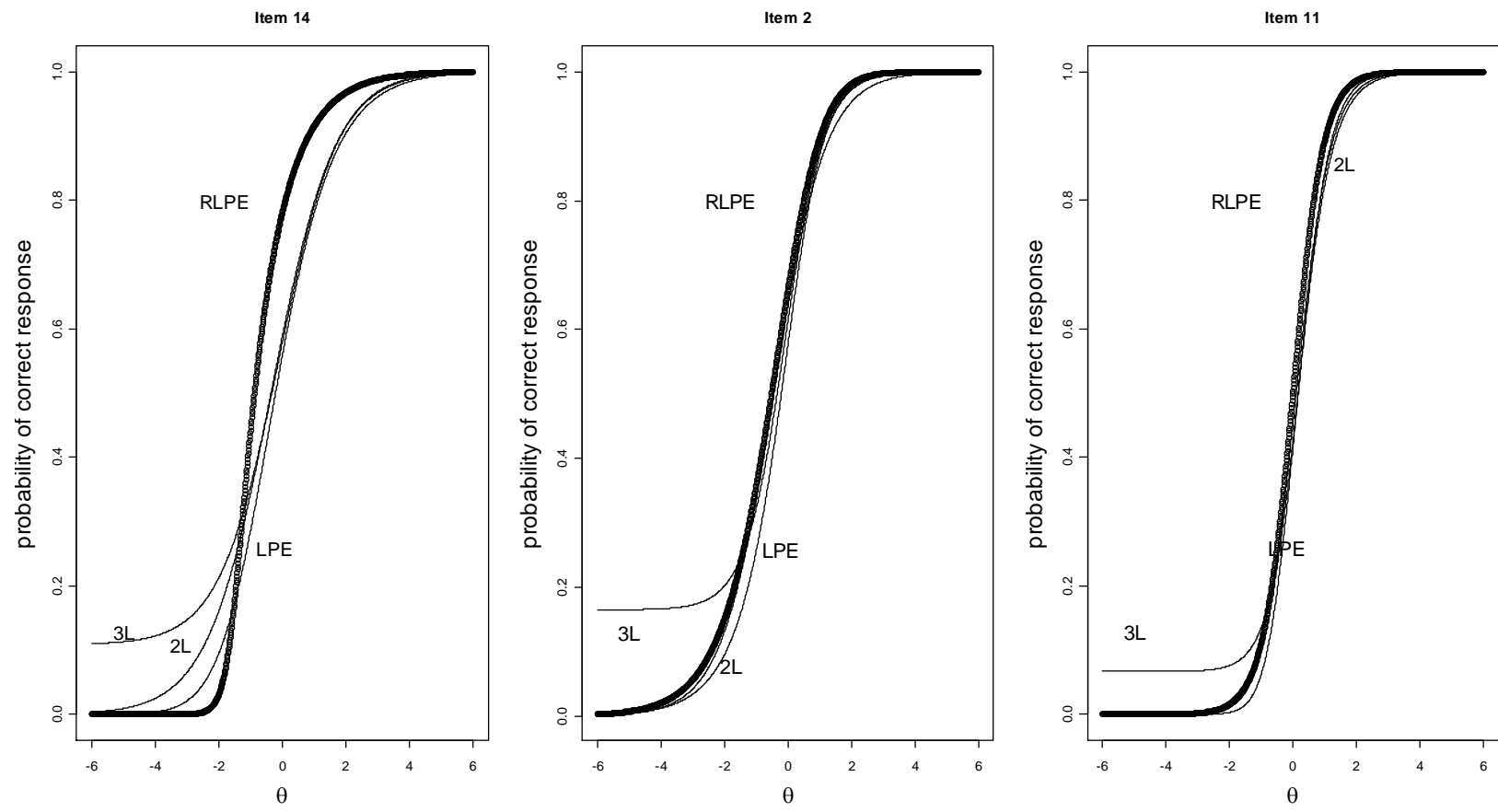


Figure 16: : CCI para os itens 14, 2 e 11 baixo os modelos 3L, 2L, RLP e LPE para os dados de Matematica (Bolfarine and Bazan, 2010).

No item 14

- Comparando as probabilidades de resposta correta dos modelos L, LPE e RLP encontramos que o modelo RLPE apresenta menores para valores $\theta < -1.5$ e maiores probabilidades para valores $\theta > -1.5$.
- Embora fácil, a resposta ao item não é direta e deve ser considerado complexo, pois precisa que um aluno desenvolva passos sucessivos de processos seqüenciais (como indicado pelo Samejima, 2000) para responder satisfatoriamente o problema completo.
- Como o processo é simples e o item é fácil, os alunos são penalizados em termos de probabilidade de resposta correta respeito do caso de ausência de assimetria para um nível de habilidade dado. Ou para um mesmo nível de probabilidade (acertos) dado as habilidades estimadas são melhores das que obtendria respeito do caso de ausência de assimetria.

- Corresponde a um caso limite e a uma CCI do tipo função de grau (heavyside) e foi obtida porque o item tem uma grande discriminação estimada ($a = 4.559$).
- Corresponde a uma CCI do tipo Guttman: para um baixo nível de habilidade ($\theta \leq -1.5$), a probabilidade de passar o item é praticamente zero, para níveis de habilidade intermediários, isto é ($-1.5 < \theta < 1.9$), uma pequena mudança na habilidade se corresponde com uma grande mudança na probabilidade de responder corretamente o item. Finalmente para altos níveis de habilidade ($\theta \geq 1.9$), a probabilidade de responder corretamente o item é praticamente 1.

3.5 Outros desenvolvimentos e futuros trabalhos

- Detecção da assimetria e modelo de três parâmetros

-Santos, Vera Lucia Filgueira dos. Teoria de Resposta ao Item: uma abordagem generalizada das Curvas Características dos Itens. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM - DME, 2009. Orientadores Dani Gamerman e Tufi Machado Soares

- Outras ligações

- Goldstein, H. (1980). Dimensionality, bias, independence and measurement scale problems in latent trait test score models. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 23, 234-246.

-Pinheiro, Alessandra Noeli Craveiro. Modelos de resposta ao item com função e ligação t-assimétrica. São Carlos: UFSCar, 2007. Orientador Josemar Rodrigues

-Pinheiro, A., Rodrigues, J. (2006). Modelos de resposta ao item com função de ligação t-assimétrica. Rev. Bras. Biom., Sao Paulo, v.26, n.1, p.131-143.

http://jaguar.fcav.unesp.br/RME/fasciculos/v26/v26_n1/A8_Josemar.pdf

- Uso na construção de provas

-Dodonov, Y. S., Dodonova, Y. A. (2010). Assymmetric item characteristics curve in item response theory model construction and application. Procedia Social and Behavioral Sciences 5, 1592-1595.

-Samejima, F. (2000). Logistic positive exponent family of models: Virtue of asymmetric item characteristics curves. Psychometrika, 65, 319-335.

- Extensões para a resposta ordinal

- Extensões para o caso de resposta policotomica
- Extensões para testlets
- Inferência clássica dos modelos apresentados
- Estudo de diagnósticos dos modelos apresentados
- Relacionamento deste parâmetro com DIF e o parâmetro de acerto casual
- Relacionamento com o modelo de Rasch
- Novas propostas de CCI assimétricas na TRI
- Muitas aplicações
- Interpretacao do novo parâmetro em questionários da área clinica e em aplicações como Marketing e análise política.

3.6 Software

- Sob perspectiva bayesiana os modelos apresentados podem ser implementados nos pacotes WinBUGS ou OpenBUGS, o no R usando os pacotes R2WinBUGS ou BRugs e usando o proc mcmc do SAS.
- *BayesianModeling* é um pequeno pacote (Bazan 2011), livre, que gera a sintaxis para a inferência bayesiana do tipo BUGS dos seguintes 14 modelos

Simétricos:

- Logísticos: 1L, 2L, 3L
- Ogiva normal: 1P, 2P, 3P

Assimétricos

- Logísticos de expoente positivo: LPE1, LPE2, LPE3
- Reverso do Logísticos de expoente positivo: RLPE1, RLPE2, RLPE3
- Ogiva skew normal: 1SP, 2SP

Para maiores detalhes ver

Bazan, J. (2011). *BayesianModeling* User's Guide. Sciences Department. Pontificia

Universidad Catolica del Peru. Disponible em

<http://argos.pucp.edu.pe/~jlbazan/software.html>

4. INFERENCA BAYESIANA NA TRI

4.1 Verossimilhança da TRI

4.2 Especificações das prioris

4.3 Estimação Bayesiana usando MCMC

4.4 Critérios de comparação de modelos usando saídas MCMC

4.5 Uso de pacotes

- Na Inferência bayesiana, os parâmetros de interesse são assumidos como variáveis aleatórias e precisasse estabelecer uma distribuição de probabilidade a priori que reflete nosso conhecimento prévio de seu comportamento.
- Na modelagem da TRI prioris são discutidas em Albert (1992), Rupp, Dey e Zumbo (2004), Bazán, Bolfarine e Leandro (2006), Sahu (2002) e Fox (2010).
- Combinando a função de verossimilhança e a distribuição a priori nos podemos obter a distribuição a posteriori dos parâmetros de interesse. Quando ele não tem forma fechada ou conhecida procedimentos MCMC são usados.
- Usando uma programação mínima e formulando uma estrutura hierárquica do modelo e possível programar MCMC para a TRI.
- Inferência Bayesiana e facilitada com o uso de diferentes métodos MCMC programados em vários pacotes como R e SAS, mas também no pacote WinBUGS e OpenBUGS.

- Para maiores detalhes ao respeito do uso de este programa para a Inferência Bayesiana nos sugerimos os livros de Congdon (2005), Congdon (2010) e Ntzoufras (2009).
- Sintaxes no R (por exemplo, MCMCpack de Martin e Quinn, 2002) e Matlab (Johnson e Albert, 1999) são também disponíveis na rede.

Outras referências

Curtis, M. S. (2010) BUGS Code for Item Response Theory. *Journal of Statistical Software*. 36: Snippet 1. 1-34.

Sheng, Y. (2010). Bayesian Estimation of MIRT Models with General and Specific Latent Traits in MATLAB. *Journal of Statistical Software*, 34, Snippet 3,1-27.

4.1 Verossimilhança da TRI

De modo geral a função de verossimilhança do modelo TRI de 3 parâmetros é dado por

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \theta, | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \{F_{d_j} [a_j \theta_i - b_j; c_j]\}^{y_i} \{1 - F_{d_j} [a_j \theta_i - b_j; c_j]\}^{1-y_i}$$

Em que $F_{d_j} [a_j \theta_i - b_j; c_j]$ é a fda da distribuição assimétrica indexada pelo parâmetro d_j associado com a ICC assimétrica.

Os modelos Logístico (ligação logito), Ogiva norma (ligação probito), LPE e RLPE (ligações power logito e sua reversa) e seus casos particulares de 1 ou 2 parâmetros são escritos no *BayesianModeling* considerando esta versão de verossimilhança.

O modelo de ogiva skew normal (de 1 e 2 parâmetros) é o único que considera uma versão aumentada baseada na regressão latente, análoga a mostrada nos modelos simétricos. A verossimilhança original e

$$L(\theta, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d} | D_{obs}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k [\Phi_{SN}(m_{ij}; d_j)]^{y_{ij}} [1 - \Phi_{SN}(m_{ij}; d_j)]^{1-y_{ij}}.$$

Mais usando a formulação de regressão latente

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & Z_{ij}^* > 0; \\ 0, & Z_{ij}^* \leq 0, \end{cases} \quad Z_{ij}^* \sim N(-d_j v_{ij} + m_{ij}, 1 - d_j^2) \quad \text{and} \quad V_{ij} \sim HN(0, 1)$$

Em que HN corresponde à distribuição normal positiva ou Half normal.

Assim a verossimilhança aumentada dado $D_2 = (\mathbf{z}^*, \mathbf{v}, \mathbf{y})$ é

$$L(\theta, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d} | D_2) \propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \phi(Z_{ij}^* ; -d_j v_{ij} + m_{ij}, 1 - d_j^2) \phi(V_{i,j} ; 0, 1) I(v_{ij} > 0) p(y_{ij} | z_{ij}^*),$$

Em que $p(y_{ij} | z_{ij}^*) = I(z_{ij}^* > 0)I(y_{ij} = 1) + I(z_{ij}^* \leq 0)I(y_{ij} = 0)$

Isto torna fácil sua escrita em código BUGS.

Maiores detalhes são dados em Bazán, Branco e Bolfarine (2006).

4.2 Especificações das prioris

É um aspecto importante do Análise Bayesiano. É muito mais importante para tamanhos de amostra pequenos. No presente trabalho nos consideramos que elas são distribuições a priori próprias conhecidas com variância grande assim como prioris independentes (veja Nzoufras, 2009).

Na literatura da TRI existe consenso com respeito à especificação da priori para o traço latente

$$\theta_i \sim N(0, 1) \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

Não em tanto, para os parâmetros a_j e b_j dos itens tem sido propostas diferentes prioris (ver Rupp et al., 2004).

Embora exista evidencia empírica da correlação das distribuições posteriores desses parâmetros (Patz e Junker, 1999) é complicado especificar a priori esta estrutura de dependência, porém são preferidas prioris independentes e comuns para cada parâmetro dos itens incluindo o caso do novo parâmetro d ,

$$\pi(\theta, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \prod_i^n \phi(\theta_i) \prod_j^k \pi_1(a_j) \pi_2(b_j) \pi_3(c_j) \pi_4(d_j).$$

Em que $\phi(\cdot)$ é a densidade da normal padrão e $\pi_1(\cdot)$, $\pi_2(\cdot)$, $\pi_3(\cdot)$, $\pi_4(\cdot)$ são as distribuições a priori para os parâmetros a_j , b_j , c_j e d_j respectivamente

Estrutura Hierárquica

$$y_{ij}|a_j, b_j, \theta_j, \lambda_j \sim \text{Ber}\left(F_\lambda [a_j \theta_i - b_j; c_j]\right)$$

$$\theta_i \sim N(0, 1)$$

$$a_j \sim \pi_1(\mu_a, \sigma_b)$$

$$b_j \sim \pi_2(\mu_b, \sigma_b^2)$$

$$c_j \sim \pi_3(r, s)$$

$$d_j \sim \pi_4(m, n)$$

$$i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k$$

Sugerimos a leitura de Bazán, Bolfarine e Leandro (2006), Bazán, Branco e Bolfarine (2006), Bolfarine e Bazán (2010), Patz e Junker (1999), Sinharay (2004) e Fu, Tao e Shi (2009) ao respeito da escolha das prioris

Sugerimos, especialmente no caso de amostras pequenas, o uso de

- $a_j \sim HN(\mu_a, \sigma_a^2)$ com $\mu_a = 1$ e $\sigma_a^2 = 0.5$ para a_j e então é esperado $E(a_j) = 1.1126$ e $V(a_j) = 0.3747$ com a $HN(\cdot)$ a distribuição normal positiva.
- $b_j \sim N(\mu_b, \sigma_b^2)$ para b_j , $\mu_b = 0$ e $\sigma_b^2 = 2$, isto é, $E(b_j) = 0$ y $V(b_j) = 1$
- $c_j \sim Beta(5, 17)$ e então é esperado $E(c_j) = 0.227$, $V(c_j) = 0.0076$.
- $d_j \sim U(-1, 1)$ e então é esperado $E(d_j) = 0$, $V(c_j) = 0.33$. Isto é usado atualmente para os modelos Ogiva Skew Normal. Para os modelos LPE e RLPE podes se usar $\lambda_j \sim gamma(0.25, 0.25)$ o que implica que $E(\lambda_j) = 1$, $V(\lambda_j) = 4$, com $q(0.025) = 1.055 \times 10^{-6}$ e $q(0.975) = 6.86647$

4.3 Estimação Bayesiana usando MCMC

Considerando as versões da verossimilhança e a especificação das prioris pode se programar a estimação bayesiana com métodos Markov Chain Monte Carlo os quais facilitam de modo simples a amostragem eficiente da distribuição marginal posterior dos parâmetros de interesse

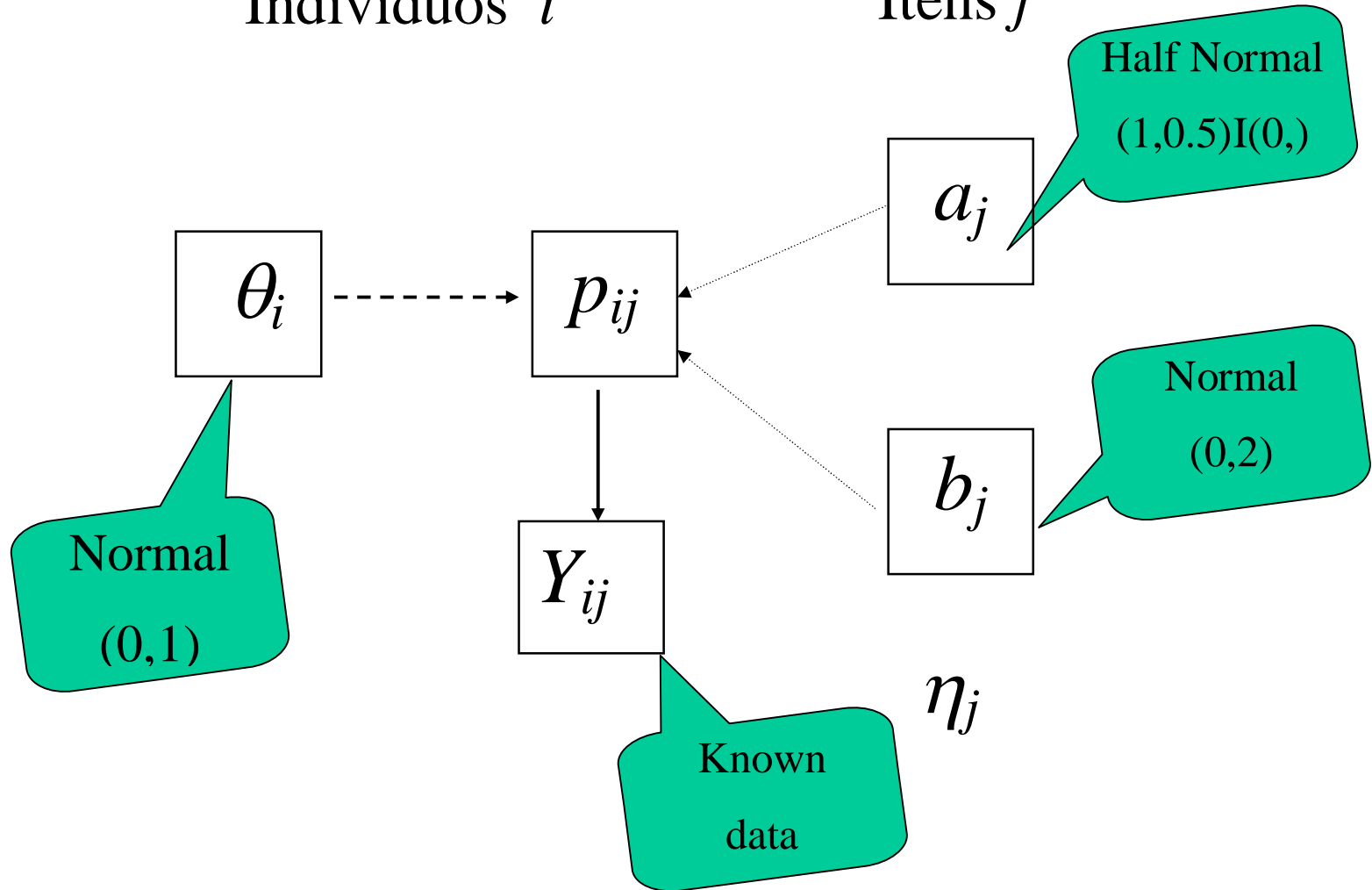
Quando considerada a primeira versão de verossimilhança um algoritmo tipo Metrópolis é programado WinBugs.

Quando considera a segunda versão de verossimilhança um algoritmo tipo Gibbs pode ser programado.

A seguir mostramos o caso do modelo de 2 parâmetros de ogiva normal ou 2P Model.

Individuos i

Itens j



```

#2P MH TYPE

model{
  for (i in 1:n) {    for (j in 1:k) {
    m[i,j]<-a[j]*theta[i]-b[j]
    p[i,j] <- phi(m[i,j])
    y[i,j] ~ dbern(p[i,j])}    }
  #abilities priors
  for (i in 1:n) { theta[i]~dnorm(0,1)    }
  #items priors
  for (j in 1:k) {
    # usual priors
    #Bazan et al (2006)
    b[j] ~ dnorm(0,0.5)
    a[j] ~ dnorm(1,2)I(0,)
    bc[j] <- b[j] - mean(b[])
  }
}

```

```

# 2P model type Gibbs
model{
  for (i in 1 : n) {
    for (j in 1 : k) {
      m[i,j] <- a[j]*theta[i] - b[j]
      z[i,j] ~ dnorm(m[i,j],1)I(lo[y[i,j]+1],up[y[i,j]+1])
    }
    theta[j] ~ dnorm(0, 1)
  }

# Priors
  for (j in 1:k) {
    b[j] ~ dnorm(0, 0.5)
    a[j]~ dnorm(1,2)I(0,)
  }

lo[1] <- -50; lo[2] <- 0; ## i.e., z | y=0 ~ N(m,1)I(-50,0)
up[1] <- 0; up[2] <- 50; ## i.e., z | y=1 ~ N(m,1)I(0,50)
}

```

4.4 Critérios de comparação de modelos usando saídas MCMC

Uma variedade de metodologias existe para comparar o ajuste de modelos bayesianos alternativos não em tanto o principal critério e a Deviance information criterion (DIC) proposta por Spiegelhalter et al. (2002), e os Expected information criteria para Akaike (EAIC) e para Schwarz ou Bayesian (EBIC) reportados em Bolfarine e Bazan (2010). Estes critérios são baseados na *posterior mean of the deviance*: $E[D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \theta)]$, em que

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \theta) = -2\ln(p(\mathbf{y}|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \theta)) = -2 \sum_{i=1}^n \ln P(Y_{ij} = y_{ij}|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \theta),$$

A qual também é uma medida de ajuste que pode ser aproximada usando a saída MCMC considerando

$$D_{bar} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G D(\mathbf{a}^g, \mathbf{b}^g, \mathbf{c}^g, \mathbf{d}^g, \theta^g),$$

Em que o índice g representa a g -ésima realização do total de G realizações e D e a *Bayesian deviance*.

EAIC, EBIC e DIC podem ser estimados usando a saída MCMC considerando

$$\widehat{EAIC} = Dbar + 2p,$$

$$\widehat{EBIC} = Dbar + p \log N,$$

$$\widehat{DIC} = Dbar + \widehat{\rho}_D = 2Dbar - Dhat,$$

Em que p é o número de parâmetros no modelo ($n + 3k$, por exemplo, nos modelos 3P ou 3L), N é o número total de observações e respostas, e neste caso corresponde a $N = k \times n$ e ρ_D , é o *effective number of parameters* proposto por Spiegelhalter et al. (2002),

Dada a comparação de dois modelos alternativos, o modelo que ajusta melhor aos dados e aquele com menor $Dbar$, DIC , $EBIC$ e $EAIC$.

Em EAIC e EBIC, $2p$ e $p \log N$ são fixos para penalizar a média a posteriori da deviance, fato que não acontece em DIC.

Como não existe consenso no uso no DIC (veja discussão em Spiegelhalter et al., 2002), o uso de mais de um critério é mais apropriado para fazer a comparação de modelos.

4.5 Uso de pacotes

A programação dos diferentes modelos apresentados aqui podem ser escritos no WinBUGS, OPENBUGS ou no R usando as livrarias R2WinBUGS o Brugs considerando o pacote *BayesianModeling* o qual permite obter os códigos BUGS para os seguintes modelos:

Logísticos: 1L, 2L, 3L,

Ogiva Normal: 1P, 2P 3P

Logísticos de expoente positivo: 1LPE, 2LPE, 3LPE

Reverso do Logístico de expoente positivo: 1RLPE, 2RLPE, 3RLPE

Ogiva Skew Normal: 1SP, 2SP

No apêndice e apresentado o uso deste pacote tomado do Manual.

5. MODELOS DA TRI CONSIDERANDO TRACOS LATENTES ASSIMETRICOS

- Grande evidencia empírica de traços latentes no normal na psicologia e em outras áreas.
- Vários trabalhos de teses de doutorado. Quatro teses doctorales em Estatística no IME-USP: Bazan (2005), Matos (2008), Azevedo (2008), Targino (2010) que envolve a pesquisadores como Heleno Bolfarine, Márcia Branco e Dalton Andrade.
- Uso da distribuição skew normal como distribuição para os traços latentes considerando diferentes parametrizações da skew normal (Azzalini, Sahu, centrada)
- Ênfases na inferência bayesiana
- Ênfases no caso multidimensional

- Uma área com pesquisa em andamento a nível teórico
- A programação dos modelos não encontrasse disponível para usuários
- Alguns estudos de simulação são prometedores mais ainda existem poucas aplicações
- Esta faltando uma organização dos trabalhos e pode ser motivo de outro minicurso com ênfase em traços latentes no normal.

2004-2005

Bazán, J. L., Bolfarine, H. & Branco, D. M. (2004). *A new family of asymmetric models for item response theory: A Skew-Normal IRT Family*. Technical report (RT-MAE-2004-17). Department of Statistics. University of São Paulo.

Bazán, J. L. (2005). *Uma familia de modelos de resposta ao item normal assimétrica*. Teses de Doutorado. Instituto de Matemática y Estadística. USP

$$\theta_i \sim SN(\mu, \sigma^2, \omega), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mu \sim N(0, 1), \quad 1/\sigma^2 \sim \text{Gamma}(0.01, 0.01), \quad \omega \sim U(-1, 1).$$

- Modelo hierárquico para traços latentes considerando hiperparâmetros
- A mesma priori para os indivíduos: localização, escala e formas comuns
- É possível estimar os traços latentes a posteriori e, a média, escala e forma da população de indivíduos a posteriori.

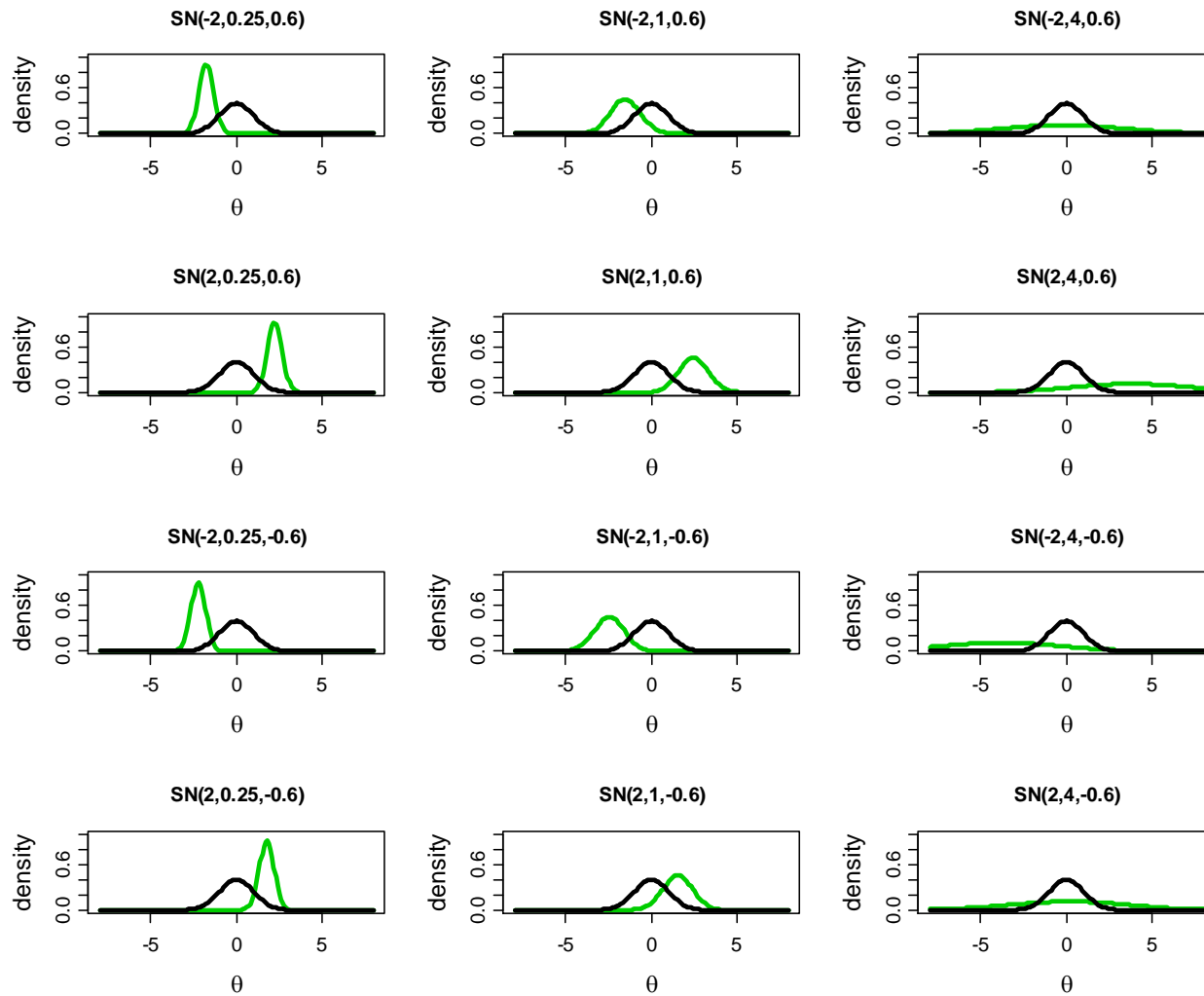


Figura 17: Traços latentes considerando a distribuição skew-normal de Azzalini

2007

Azevedo, C. L. N. and Andrade, D. F. (2007) . *Latent trait estimation in nominal response model: latent trait asymmetry and hierarchical and empirical framework*. IME-USP.

Dylan Molenaar (2007). Accounting for non-normality in latent regression models using a cumulative normal selection function. *Measurement and Research Department Reports*, 3. Arnhem: Cito.

2008

Sass, D. A., Schmitt, T. A., Walker, C. M. (2008). Estimating Non-Normal Latent Trait Distributions within Item Response Theory Using True and Estimated Item Parameters. *Applied Measurement in Education*, 21, 65-88.

Matos, G. S. (2008). *Modelos multidimensionais da TRI com distribuições assimétricas para os traços latentes*. Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo-SP.

Azevedo, C. L. N. (2008). *Modelos longitudinais de grupos múltiplos multiníveis na Teoria da Resposta ao Item: métodos de estimação e seleção estrutural sob uma perspectiva bayesiana*. Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo-SP.

2010

Broccoli S. and Cavrini G. (2010). *A Bayesian IRT model for mixed responses and skew latent variable*. Scientific Meetings of SIS, 45th Scientific Meeting of the Italian Statistical Societ.

Nojosa, T. R. (2010). *Inferencia Bayesiana em Modelos Multidimensionais de Resposta ao Item*. Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo-SP.

Dylan Molenaar, Conor Dolan, & Norman Verhelst (2010). Testing and modeling non-normality within the one factor model. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 63, 293-317.

Moleenar, D., Dolan, C., Wicherts, J. and van der Mass, H. (2010). Modeling Differentiation of Cognitive Abilities within the Higher-Order Factor Model using Moderated Factor Analysis. *Intelligence*. 38 , 611–624

Montenegro, A. (2010). Multidimensional Item Response Theory Models where the Ability has a Latent Linear Structure Teses de Doutorado. Universidad Nacional de Colombia

2011

Azevedo, Caio L.N. ; Bolfarine, H. ; Andrade, D. F. (2011). Parameter recovery for a skew-normal IRT model under a Bayesian approach: hierarchical framework, prior and kernel sensitivity and sample size. *Journal of Statistical Computation and Simulation*

Azevedo, C. L. N., Bolfarine, H. and Andrade, D. F. (2011). Bayesian inference for a skew-normal IRT model under the centred parametrization, *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 55, p. 353-365.

Xu, X. Jia, Y (2011). The Sensitivity of Parameter Estimates to the Latent Ability Distribution. Research Report. ETS RR–11-40

Stingo F.C., Stanghellini E., Capobianco R. (2011). On the estimation of a binary response model in a selected population. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141, 3293-3303.

Bazan, J. L. Branco, M., Bolfarine, H. (2012) Extensions of the Skew-Normal Ogive Item Response Model. Submitted

6. Referências

Albert, J. (2009). *Bayesian Computation with R*. Springer Verlag

Basu, S. and Mukhopadhyay, S. (2000). Binary response regression with normal scale Mixtures links, in *Generalized Linear Models: A Bayesian Perspective*, Eds. D.K. Dey, S.K. Ghosh, and B.K: Mallick, New York: Marcel Dekker.

Bazán, J., Branco, M. D. and Bolfarine, H. (2006) A skew item response model. *Bayesian Analysis*, **1**, 861- 892.

Bazán, J. L., Bolfarine, H. and Branco, D. M. (2010) A framework for skew-probit links in Binary regression. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **39**, 678-697

Bazán, J. L., Bolfarine, H. and Branco, M. D. (2006) A generalized skew probit class link for binary regression. *Technical report* (RT-MAE-2006-05). Department of Statistics. University of São Paulo.

Bazán, J. L., Bolfarine, H. and Leandro, A. R. (2006). Sensitivity analysis of prior specification for the probit-normal IRT model: an empirical study. *Estadística, Journal of the Inter-American Statistical Institute* 58(170-171), 17-42. Available in <http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/bazanestadistica.pdf>

Birnbaum, A. (1968). Some Latent Trait Models and Their Use in Inferring an Examinee's Ability. In Lord, F.M. y Novick, M.R. (Eds) *Statistical Theories of Mental Test Scores*. New York: Addison-Wesley.

Bolfarine, H. and Bazán, J. L. (2010). Bayesian estimation of the logistic positive Exponent IRT Model *Journal of Educational Behavioral Statistics*, 35, 6, 693-713

Carlin, B.P., Louis, T.A., (2000). *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*. Chapman & Hall, CRC, London, Boca Raton, FL.

Collet, D. (2003). *Modelling binary data*. Chapman & Hall/CRC, Second Edition, Boca Raton, USA.

Congdon, P. (2010). *Applied Bayesian Hierarchical Methods*, Chapman & Hall / CRC.

Congdon, P. (2005). *Bayesian Models for Categorical Data*, Wiley.

Chen, M. H., Dey, D., and Shao, Q-M. (2001). Bayesian analysis of binary data using Skewed logit models. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, **51**, 201-202.

Fischer, G. and Molenaar, I. (1995). *Rasch Models Foundations, recent development, and applications*. The Netherlands: Springer-Verlag.

Fu, ZH., Tao, J. and Shi, NZ. (2009). Bayesian estimation in the multidimensional three-parameter logistic model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **79**, 819 - 835.

Gilks, W. R. and Wild, P. (1992). Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling. *Applied Statistics*, **41**: 337-348

Johnson, V. and Albert, J. (1999). *Ordinal Data Modeling*. New York: Springer-Verlag.

Lord, F. M. (1952). *A theory of test scores*. New York: Psychometric Society.

Martin, A.D. and Quinn, K. M. (2002). *MCMCpack*. scythe.wustl.edu/mcmcpack.html.

Nagler J. (1994) Scobit: An alternative estimator to Logit and Probit. *American Journal of Political Science*, **38**(1), 230-255.

Ntzoufras, I. (2009). Bayesian Modeling Using WinBugs. Wiley Series in Computational Statistics, Hoboken, USA.
Prentice, R. L. (1976) A Generalization of the probit and logit methods for Dose response curves. *Biometrika*, **32**(4), 761-768.

Rupp, A., Dey, D. K., and Zumbo, B. (2004). To Bayes or Not to Bayes, from Whether to When: *Applications of Bayesian Methodology To Item Response Modeling Structural Equations Modeling*. **11**, 424-451.

Sahu, S. K. (2002). Bayesian estimation and model choice in item response models. *Journal Statistical Computing Simulation*, **72**: 217-232.

Samejima, F (2000). Logistic positive exponent family of models: Virtue of asymmetric item characteristic curves. *Psychometrika*, **65**(3): 319-335.

Spiegelhalter, D. J., Thomas, A., Best, N. G. and Gilks, W.R. (1996) BUGS 0.5 examples (Vol. 1 Version i). Cambridge, UK: University of Cambridge.

Spiegelhalter, D. J., Thomas, A., Best, N. G., Lunn, D (2007) OpenBUGS User Manual version 3.0.2. MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

Appendice Uso do BayesianModeling na TRI (do Manual)

2.4. Application

The program *BayesianModeling* generates the syntaxes necessary for the Bayesian estimation of several models of the Item Response Theory, for posterior use in WinBUGS (see Spiegelhalter et al 1996) or OpenBUGS (Spiegelhalter et al 2007) program, using diverse MCMC methods. For this only is necessary to have a file of text with the data, generated from any statistics program or from Excel. In each column, usually appear the names of the items in the first line.

As an example, consider a data set of 14 items from a Mathematical test developed by the Unity of Measurement of the Educative Quality of Peru for the National Evaluation of the sixth degree of 1998 which were applied to a sample of 131 students of sixth degree of high socioeconomic level. These data have been used in Bazán, Branco and Bolfarine (2006) and Bazán, Bolfarine and Leandro (2006).

The released items are a sampling from a test that appears published in the following link:

<http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/publicaciones/boletines/Boletin-13.pdf>

In the table appears the identification corresponding to the number of item with the number in the UMEQ test.

Number of item of Math data	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Number of item in the UMEQ test	1	8	9	11	12	13	21	25	32	5	17	30	2	10

The data file has the following structure:

I01	I02	I03	I04	I05	I06	I07	...	I12	I13	I14
1	1	0	1	1	0	1	...	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	...	0	1	1
.
.

.
 1 1 0 1 0 0 1 ... 0 1 1

As an application example we consider an IRT model with asymmetric link, in this case we consider the skew normal ogive model with parameters of difficulty and of discrimination, this is a two-parameter skew probit IRT model (2SP)

$$Y_{ij} | \theta_i, \eta_j \sim \text{Bernoulli}(p_{ij})$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_i, \eta_j) = F(m_{ij})$$

$$m_{ij} = a_j(\theta_i - b_j),$$

$i = 1, \dots, 131$, $j = 1, \dots, 14$, where $\lambda_j > 0$ is a parameter of penalty and Φ_{SN} denote the skew normal cdf with pdf give by:

$$\phi_{SN}(x; \lambda) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x),$$

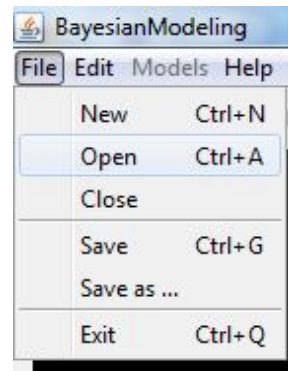
where ϕ and Φ is the pdf and the cdf respectively of the standard normal distribution.

2.5. Use of the BayesianModeling

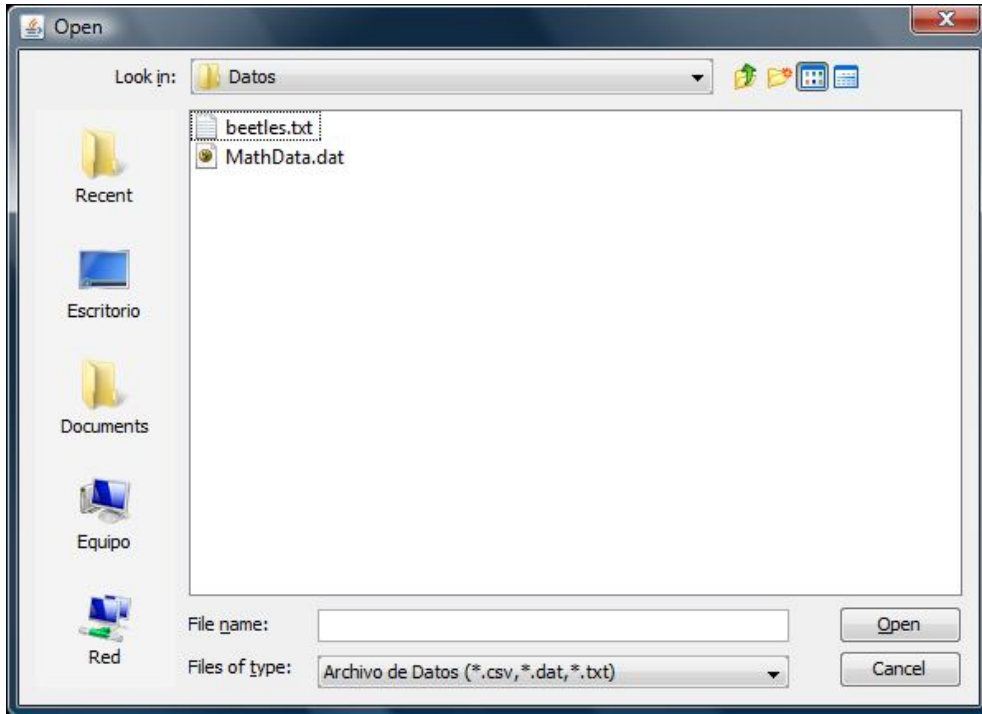
We described the use of the *BayesianModeling* to implements the 2SP IRT model to the data of MathData.dat described in the previous section. For more details of this application, review Bazán, Branco and Bolfarine (2006).

2.5.1 Generate the syntax of the model

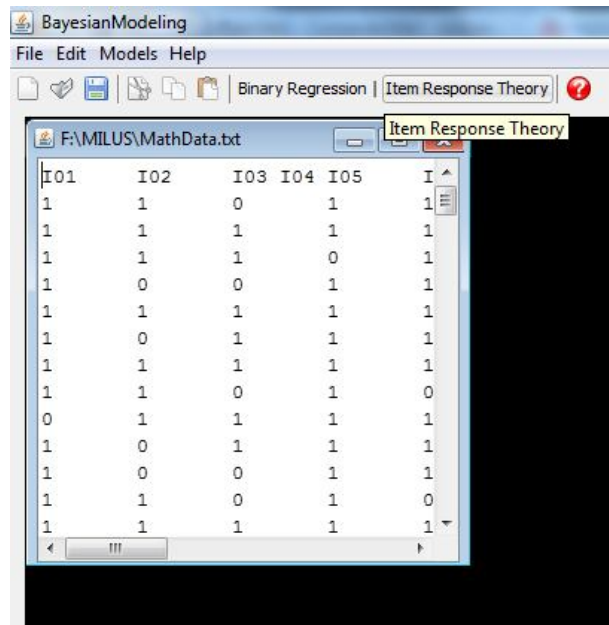
1. Go to *File > Open*



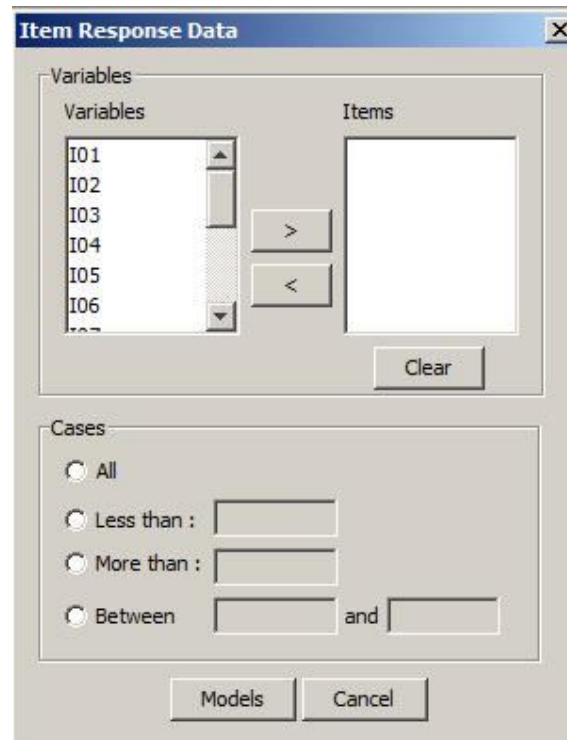
2. Open the file with the data set.



3. Click *Item Response Theory*

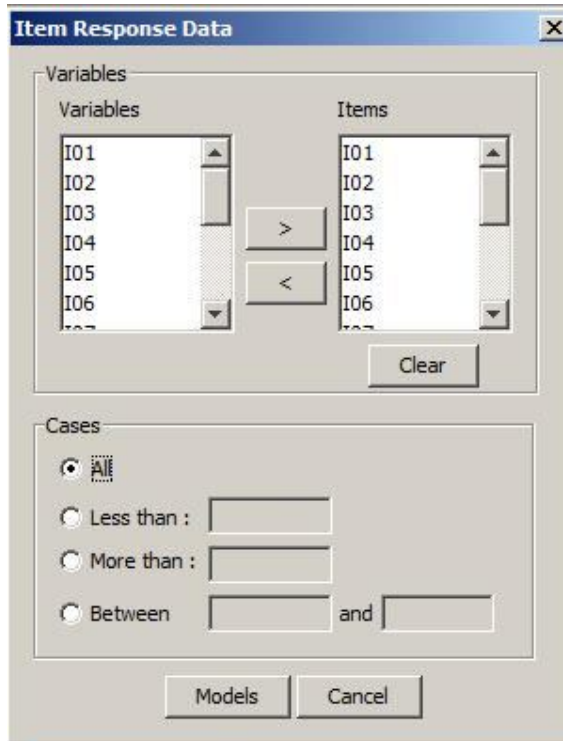


4. This will open the dialogue box "Item Response Data".



5. Then select the items that will be used. As well as to indicate if will use all the data or only a part of them.

In our case will select all the variables as items and then click in *All*.



6. Then click in *Models* to open the dialogue box "*Item Response Theory*". Here have to select the models that will be used, in this example only select the asymmetric normal ogive model of 2 parameters (2SP) and click OK.



7. This generates two data files: the file with the syntax of the model chosen in WinBUGS (Skew Probit 2SP Model) and another file with the syntax of the data. (Item Response Data).

Bayes_Modeling

File Edit Models Help

Binary Regression | Item Response Theory

Skew Probit 2SP Model

```
#2SP
model{
  for (i in 1:n) {
    for (j in 1:k) {
      m[i,j]<-a[j]*theta[i]-b[j]
      muz[i,j]<-m[i,j]-delta[j]*V[i,j]
      Zs[i,j] ~ dnorm(muz[i,j],preczs[j])I(lo[y[i,j]+1],up[y
      V[i,j] ~ dnorm(0,1)I(0,)
    }
  }

  #abilities priors
  for (i in 1:n) {
    theta[i]~dnorm(0,1)
  }
}
```

Item Response Data

y[,1]	y[,2]	y[,3]	y[,4]	y[,5]	y[,6]	y[,7]	y[,8]	y[,9]	y[,10]	y[,11]	y[,12]	y[,13]
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1

2.5.2 Bayesian Estimation using WinBUGS or OpenBUGS

As it observes the BayesianModeling generates two files, one that contains the model of Binary regression with the link selected and another file that contains the data set. Both files in format txt have to be saved to be opened in the program WinBUGS or OpenBUGS to do the appropriate analysis of Bayesian inference.

1. Open the files with the syntax of the model and of the data previously generated by the BayesianModeling in WinBUGS or OpenBUGS.

The screenshot shows the WinBUGS14 interface with two open windows. The top window, titled 'Skew Probit 2SP Model.txt', contains the following code:

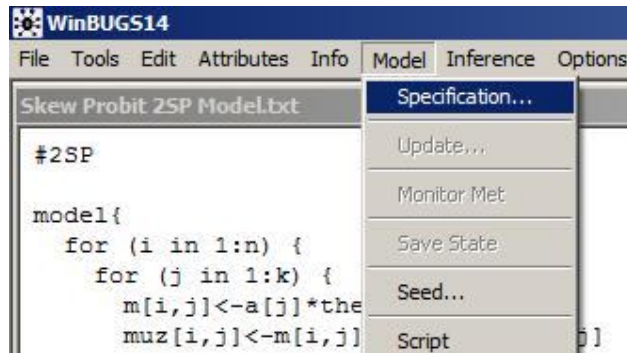
```
#2SP

model{
  for (i in 1:n) {
    for (j in 1:k) {
      m[i,j]<-a[j]*theta[i]-b[j]
      muz[i,j]<-m[i,j]-delta[j]*V[i,j]
      Zs[i,j] ~ dnorm(muz[i,j],preczs[j])I(lo[y[i,j]+1],up[y[i,j]+1])
      V[i,j] ~ dnorm(0,1)I(0,)
    }
  }
  #abilities priors
  for (i in 1:n) {
    theta[i]~dnorm(0,1)
  }
  #items priors
  for (j in 1:k) {
    # usual priors
  }
#Bazan et al (2007)
# difficulty (-intercept) with prior similar to bilog
```

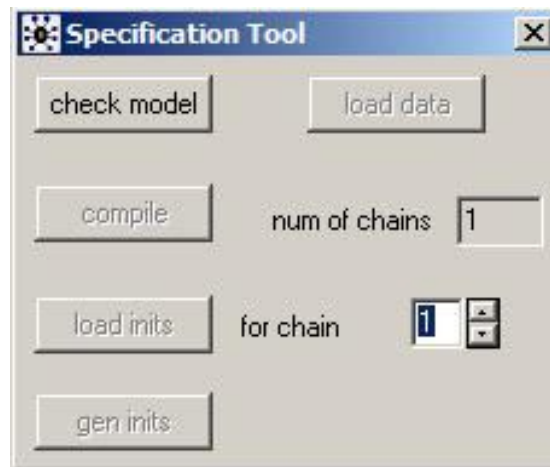
The bottom window, titled 'Item Response Data.txt', contains the following data:

```
y[,1] y[,2] y[,3] y[,4] y[,5] y[,6] y[,7] y[,8] y[,9] y[,10] y[,11] y[,12]
y[,13] y[,14]
1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 |
1 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1
```

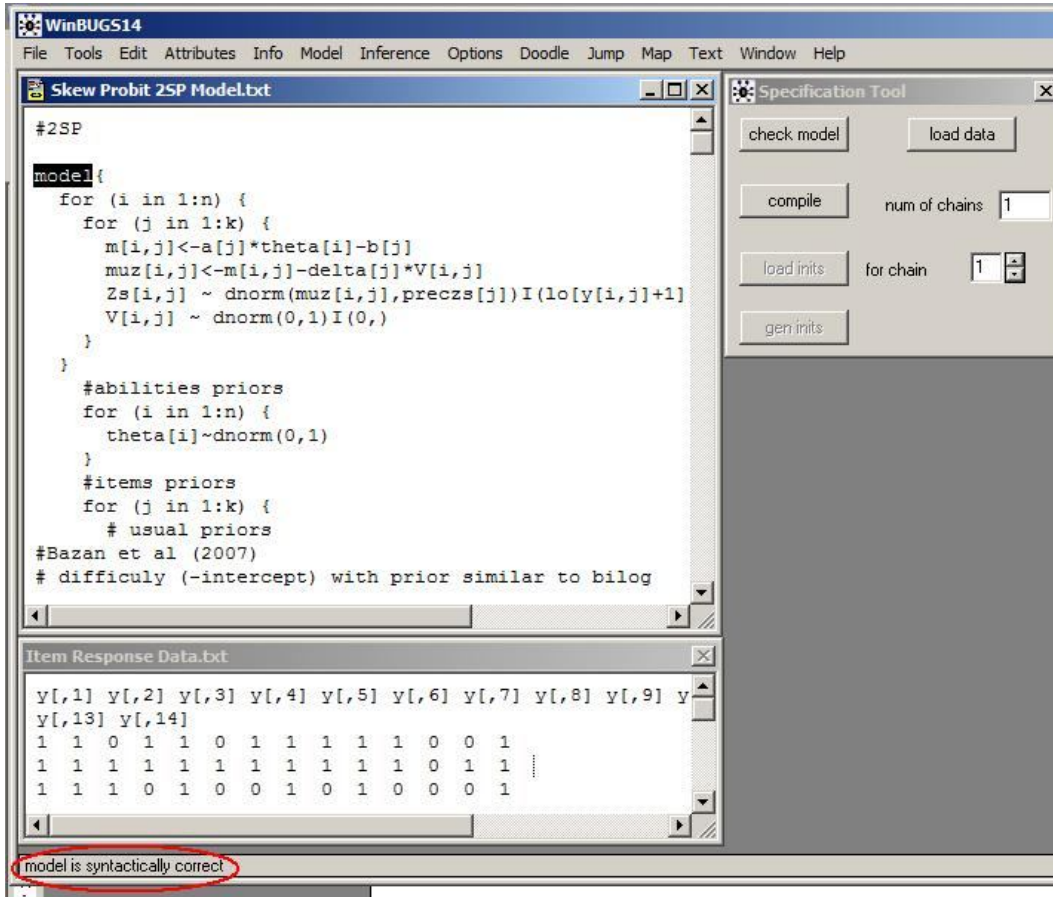
2. Having activated the window of Skew Probit 2SP Model. txt, click *Model > Specification*



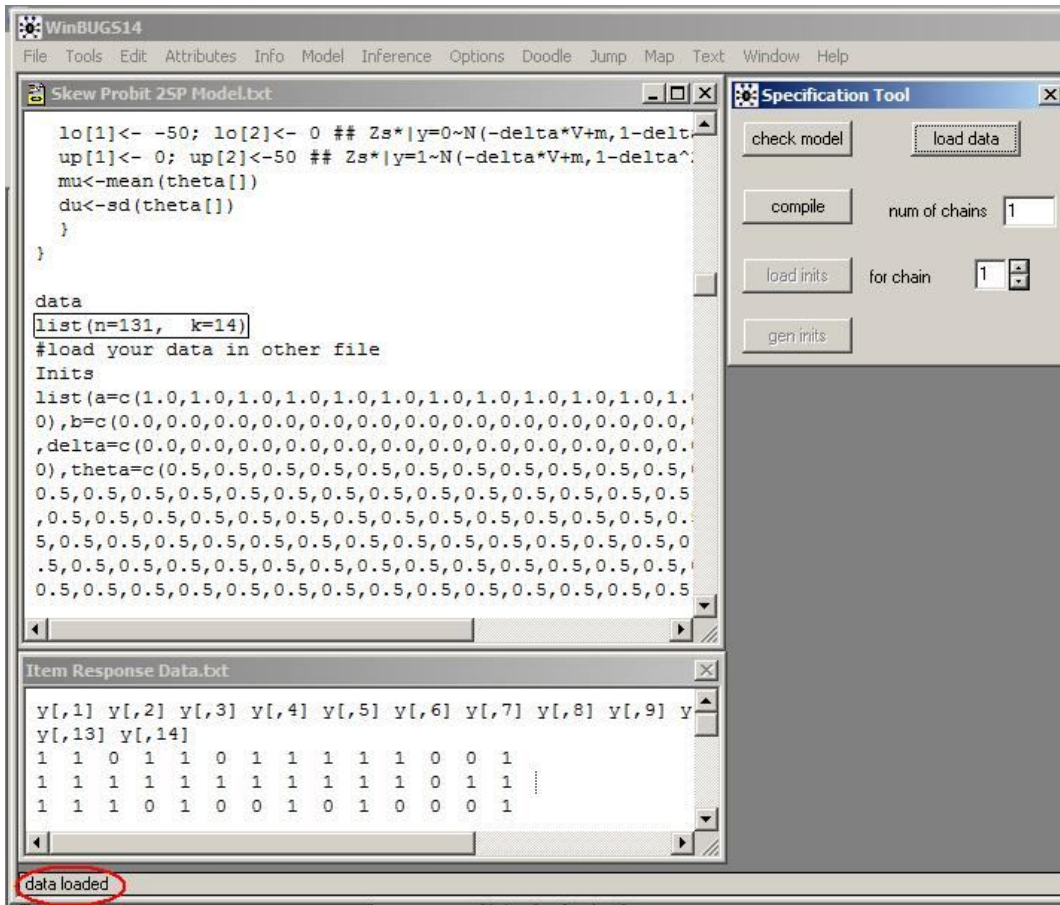
3. This will open the dialogue box "Specification Tool".



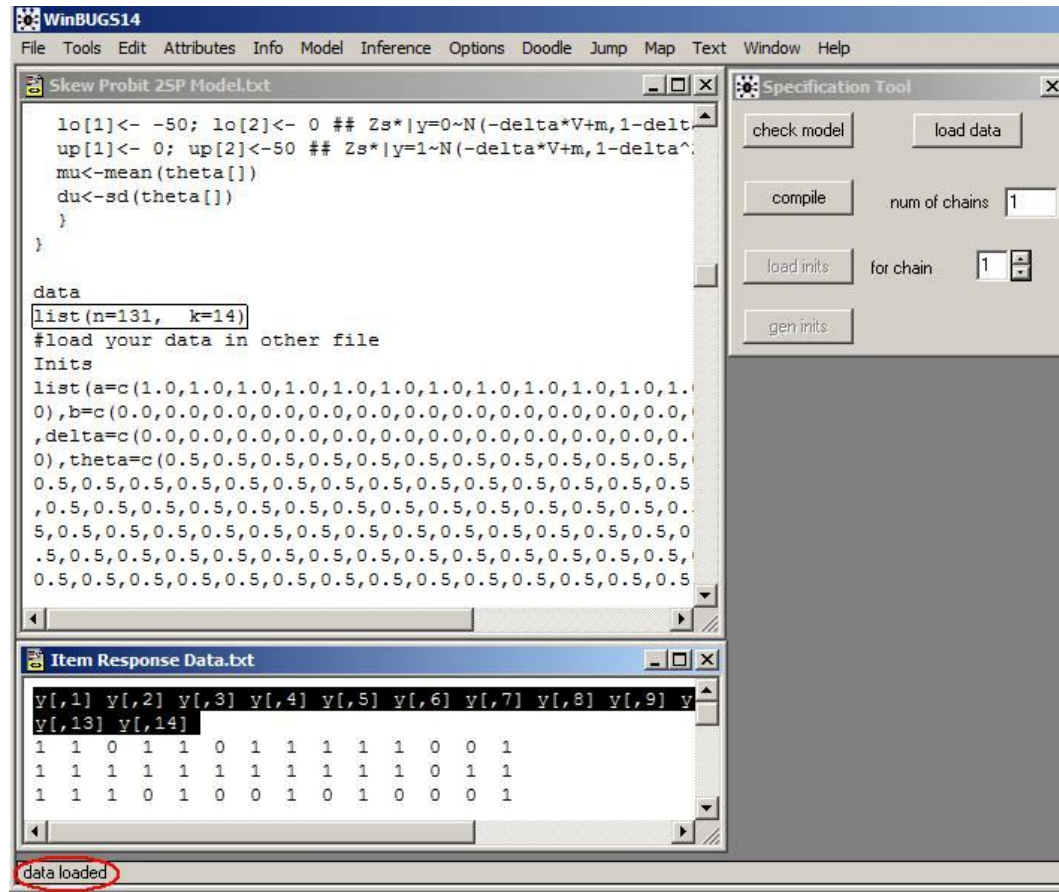
4. Select the model, highlighting the word *model* and click *check model*. In the left corner below has to appear "*model is syntactically correct*" that indicates that the syntax of the model has been properly formulated



5. Select in the Skew Probit 2SP Model.txt file, the line under *data* and do click *load data*. In the left corner below appears "data loaded" indicating that the data have been loaded.

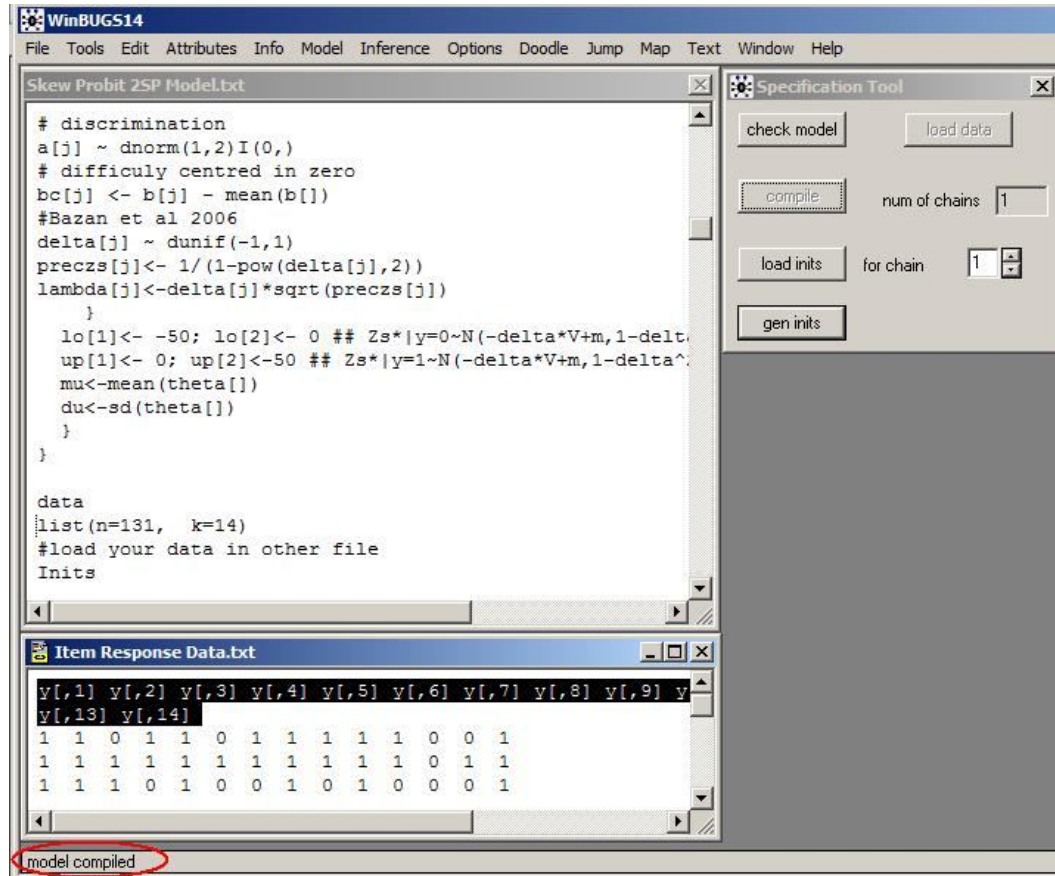


6. In the data file select the list of the variables that are placed in the first row and click *load data*.

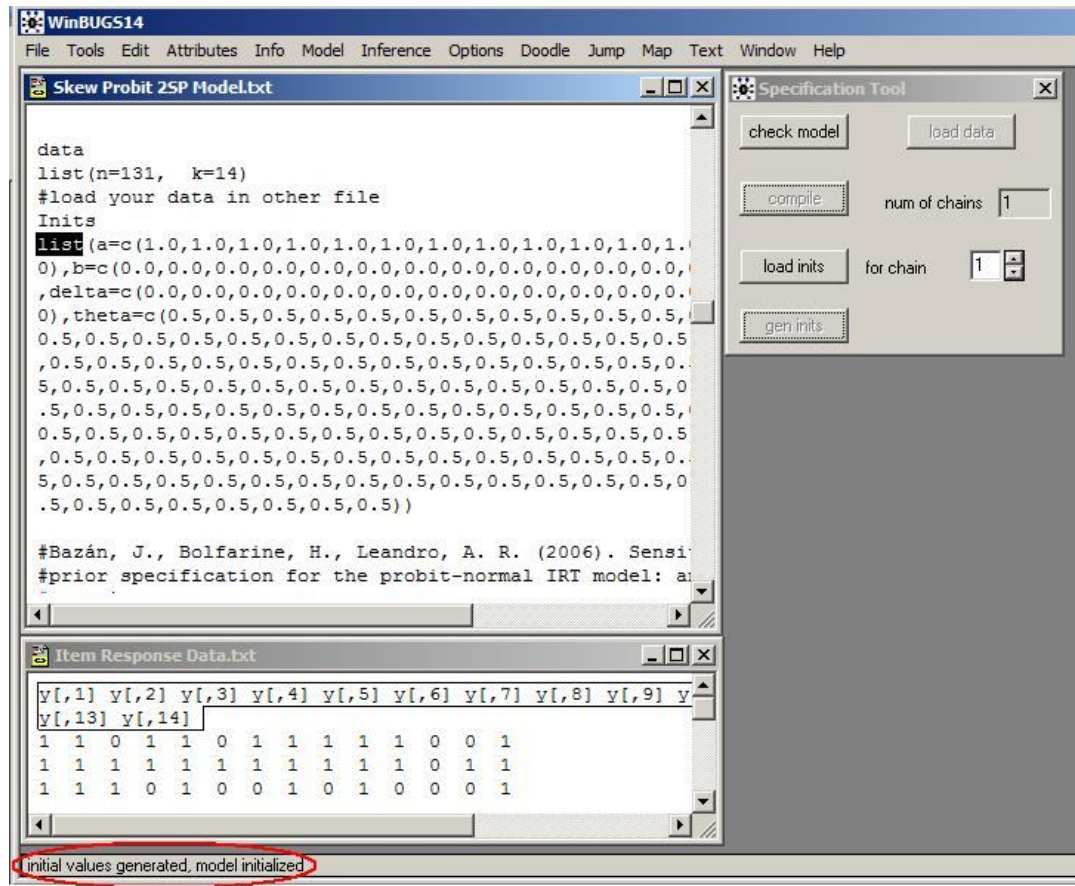


7. In the dialogue box "*Specification tool*" indicate the number of chains that want to generate in the text box "num of chains". Once specified the number of chains to generate (in this example 1 chain) do click *compile*.

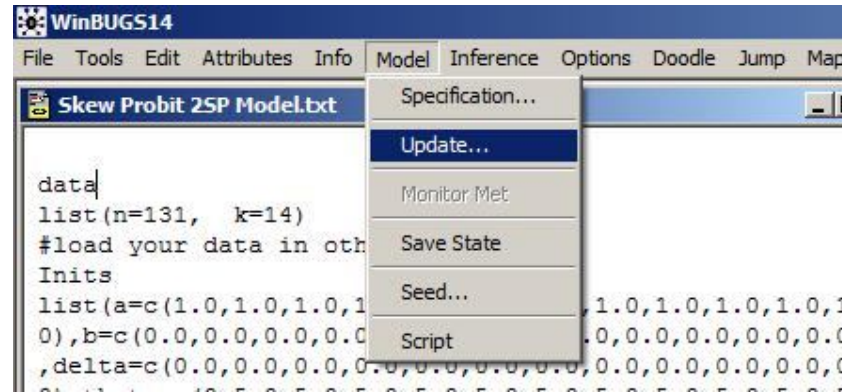
In the left corner below has to appear "*model compiled*".



8. Select the line under *Inits* in the file of the model and click *load inits*. Then click *gen inits*. This generates the initial values for the Bayesian estimation. In the left corner below has to appear "initial values generated, model initialized"



9. Click *Model > Update*



10. This will open the dialogue box "Update tool". In the text box *updates* enter the number of iterations that requires and then click *update*.



While the program does the iterations, in the left corner below will appear the following message "model is updating" until the iterations finish when the following message "4000 updates took 61 s" appears.

11. Then should specify that parameters need the program save, for this go to *Inference* > *Samples*, which will open the dialogue box "Sample monitor tool". In the text box *node* type the name of the parameter and then click *set*; this has to be done for each parameter.



12. Repeat the step 10 generating more iterations that now have being saved by the WinBUGS or OpenBugs. In the dialogue box "*Sample Monitor Tool*", can calculate posteriori statistics of the parameters clicking *stats*, a historical of the chains clicking *history*, an estimation of the posteriori density and others statistics of the chains can be calculated using this dialogue box.

2.5.4 Bayesian Estimation using WinBUGS or OPENBUGS in R

As we have seen in the previous section with the two files that generates the BayesianModeling can implement the Bayesian estimation with the WinBUGS or OpenBugs.

The implementation can be done using interfaces from R with WinBUGS or OpenBUGS. For this will need the original text file with the data in columns:

```
I01  I02  I03      I04      I05  I06  ...  I12  I13  I14
1    1    0    1    1    0    1    ...  0    0    1
1    1    1    1    1    1    1    ...  0    1    1
.    .    .    .    .    .    .    .    .    .    .
.    .    .    .    .    .    .    .    .    .    .
.    .    .    .    .    .    .    .    .    .    .
1    1    0    1    0    0    1    ...  0    1    1
```

i.e. the file called MathData.dat (See section 2.5.1) and the syntax of the model generated in BayesianModeling will have to copy only the syntax of the model. In the example below implement the asymmetric normal ogive model of 2 parameters.


```

model{
  for (i in 1:n) {
    for (j in 1:k) {
      m[i,j]<-a[j]*theta[i]-b[j]
      muz[i,j]<-m[i,j]-delta[j]*V[i,j]
      Zs[i,j] ~ dnorm(muz[i,j],preczs[j])I(lo[y[i,j]+1],up[y[i,j]+1])
      V[i,j] ~ dnorm(0,1)I(0,)
    }
  }

  #abilities priors
  for (i in 1:n) {
    theta[i]~dnorm(0,1)
  }

  #items priors
  for (j in 1:k) {
    # usual priors
#Bazan et al (2006)
# difficulty (-intercept) with prior similar to bilog
b[j] ~ dnorm(0,0.5)
# discrimination
a[j] ~ dnorm(1,2)I(0,)
# difficulty centred in zero
bc[j] <- b[j] - mean(b[])
    #Bazan et al 2006
delta[j] ~ dunif(-1,1)
preczs[j]<- 1/(1-pow(delta[j],2))
lambda[j]<-delta[j]*sqrt(preczs[j])
  }
}

```



```

model{
  for (i in 1:n) {
    for (j in 1:k) {
      m[i,j]<-a[j]*theta[i]-b[j]
      muz[i,j]<-m[i,j]-delta[j]*V[i,j]
      Zs[i,j] ~ dnorm(muz[i,j],preczs[j])I(lo[y[i,j]+1],up[y[i,j]+1])
      V[i,j] ~ dnorm(0,1)I(0,)
    }
  }

  #abilities priors
  for (i in 1:n) {
    theta[i]~dnorm(0,1)
  }

  #items priors
  for (j in 1:k) {
    # usual priors
#Bazan et al (2006)
# difficulty (-intercept) with prior similar to bilog
b[j] ~ dnorm(0,0.5)
# discrimination
a[j] ~ dnorm(1,2)I(0,)
# difficulty centred in zero
bc[j] <- b[j] - mean(b[])
#Bazan et al 2006
delta[j] ~ dunif(-1,1)
preczs[j]<- 1/(1-pow(delta[j],2))
lambda[j]<-delta[j]*sqrt(preczs[j])
  }

  lo[1]<- -50; lo[2]<- 0 ## Zs*|y=0~N(-delta*V+m,1-delta^2)I(-50,0)
  up[1]<- 0; up[2]<-50 ## Zs*|y=1~N(-delta*V+m,1-delta^2)I(0,50)
  mtheta<-mean(theta[])
  sdtheta<-sd(theta[])
}

```

Afterwards, to implement the Bayesian estimation in R will follow the next steps to use the library R2WinBUGS. Remember to install it previously.

1. In R, download the library R2WinBUGS with the following command:

```
Library(R2WinBUGS)
```

2. Read the data (the MathData.dat file for this example is placed in the folder F:\MILUS\MathData.dat)

```
datos <- read.table("F:/MILUS/MathData.dat", header=TRUE, sep="", na.strings="NA", dec=".",strip.white=TRUE)
```

2. Create a *list* that contain the data and the information that is under *data* in the file generated by the BayesianModeling.

```
data  
list(n=131, k=14)
```

using the following command

```
data<-list(y=as.matrix(datos),list(n=131,k=14))
```

3. Create a program that will generate initial values.

n.burnin = is the number of iterations that will be discharged as burn-in.

Then the following command implements the Bayesian estimation and the simulations are stored in the object out .

```
out<-
```

```
bugs(data,inits,parameters.to.save=c("a","b","delta"),  
model.file="F:/MILUS/model.txt", n.chains=1, n.iter=20000,  
n.burnin=10000, program="OpenBUGS")
```

If type salida in the line of commands of R obtain a summary of the simulation

```
> out
```

Note that for now we just asked for monitoring the parameters a, b and delta. But if it requires could ask for θ .

Observation: although this is similar to the syntax that appears in the page 25, *model.txt* corresponds to an IRT model and therefore the parameters are others.

```
Inference for Bugs model at "F:/MILUS/model.txt", fit using OpenBUGS,  
1 chains, each with 20000 iterations (first 10000 discarded), n.thin = 10  
n.sims = 1000 iterations saved
```

	mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%
a[1]	0.5	0.2	0.1	0.3	0.5	0.6	1.0
a[2]	0.3	0.2	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6
a[3]	0.5	0.2	0.1	0.3	0.5	0.6	1.0
a[4]	0.9	0.3	0.4	0.6	0.9	1.1	1.7
a[5]	0.5	0.2	0.1	0.3	0.4	0.6	0.9
a[6]	0.3	0.2	0.0	0.2	0.3	0.4	0.6
a[7]	0.8	0.4	0.2	0.5	0.8	1.1	1.6
a[8]	0.9	0.3	0.3	0.6	0.8	1.0	1.5

a[9]	0.2	0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5
a[10]	0.4	0.2	0.1	0.3	0.4	0.6	1.0
a[11]	1.3	0.4	0.6	1.0	1.2	1.5	2.1
a[12]	0.4	0.2	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7
a[13]	0.4	0.2	0.1	0.3	0.4	0.5	0.9
a[14]	0.4	0.2	0.0	0.2	0.4	0.5	1.0
b[1]	-0.7	0.5	-1.4	-1.1	-0.8	-0.3	0.2
b[2]	-0.9	0.5	-1.6	-1.3	-1.0	-0.6	0.1
b[3]	-0.1	0.4	-0.7	-0.4	-0.1	0.3	0.7
b[4]	-1.8	0.5	-2.9	-2.2	-1.9	-1.4	-0.8
b[5]	-1.0	0.4	-1.8	-1.4	-1.1	-0.7	-0.2
b[6]	0.3	0.4	-0.4	0.0	0.4	0.7	1.0
b[7]	-1.5	0.6	-2.6	-1.9	-1.5	-1.0	-0.2
b[8]	-1.3	0.5	-2.2	-1.7	-1.4	-1.0	-0.3
b[9]	-0.7	0.4	-1.4	-1.0	-0.7	-0.4	0.1
b[10]	-1.0	0.4	-1.7	-1.4	-1.1	-0.7	-0.2
b[11]	-1.8	0.7	-3.3	-2.2	-1.8	-1.3	-0.6
b[12]	0.3	0.4	-0.4	0.0	0.4	0.7	1.0
b[13]	-0.9	0.5	-1.6	-1.3	-1.0	-0.6	0.1
b[14]	-1.6	0.5	-2.3	-2.0	-1.7	-1.3	-0.6
delta[1]	-0.1	0.5	-1.0	-0.6	-0.2	0.3	1.0
delta[2]	-0.1	0.5	-1.0	-0.5	-0.1	0.3	0.9
delta[3]	0.1	0.5	-0.9	-0.3	0.1	0.5	0.9
delta[4]	0.0	0.5	-0.8	-0.4	0.0	0.5	0.9
delta[5]	-0.1	0.5	-0.9	-0.5	-0.2	0.2	0.8

```
delta[6]    0.0  0.5  -0.9  -0.4   0.0   0.4   0.8
delta[7]   -0.2  0.5  -1.0  -0.6  -0.3   0.1   0.8
delta[8]   -0.1  0.5  -0.9  -0.5  -0.1   0.3   0.9
delta[9]    0.0  0.5  -0.8  -0.4  -0.1   0.3   1.0
delta[10]  -0.1  0.5  -0.8  -0.5  -0.1   0.3   0.9
delta[11]  -0.4  0.5  -0.9  -0.8  -0.5  -0.1   0.7
delta[12]   0.1  0.5  -0.8  -0.3   0.1   0.4   0.9
delta[13]   0.0  0.6  -0.9  -0.4   0.0   0.5   0.9
delta[14]   0.1  0.5  -0.8  -0.4   0.1   0.5   1.0
deviance  3859.1 57.8 3734.8 3818.8 3861.8 3902.6 3955.5
```

DIC info (using the rule, $pD = \bar{D} - \hat{D}$)

$pD = -47.9$ and $DIC = 3811.0$

DIC is an estimate of expected predictive error (lower deviance is better).

14. Finally, for more details in the command *bugs* can consult Help writing in the line of commands

?bugs